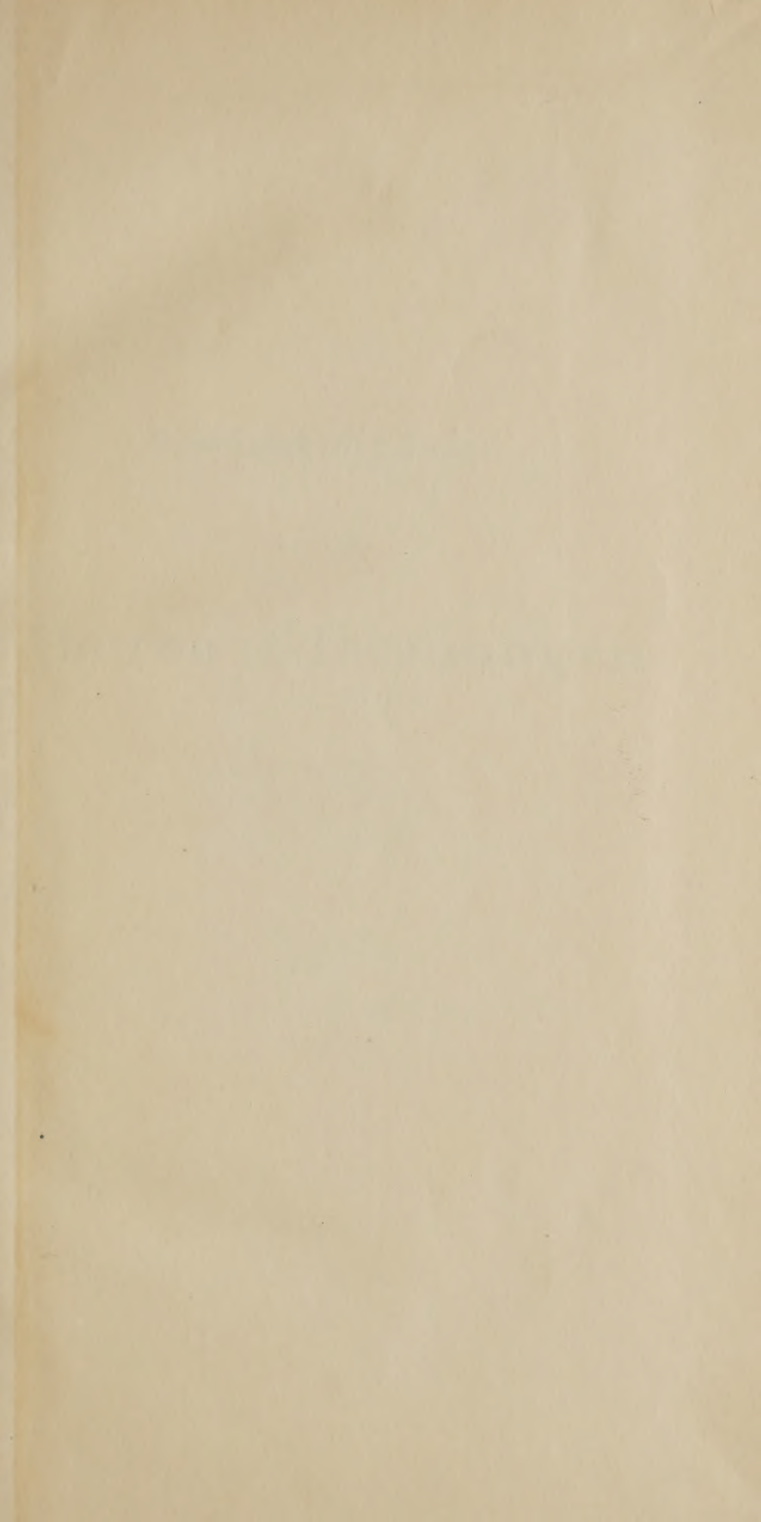
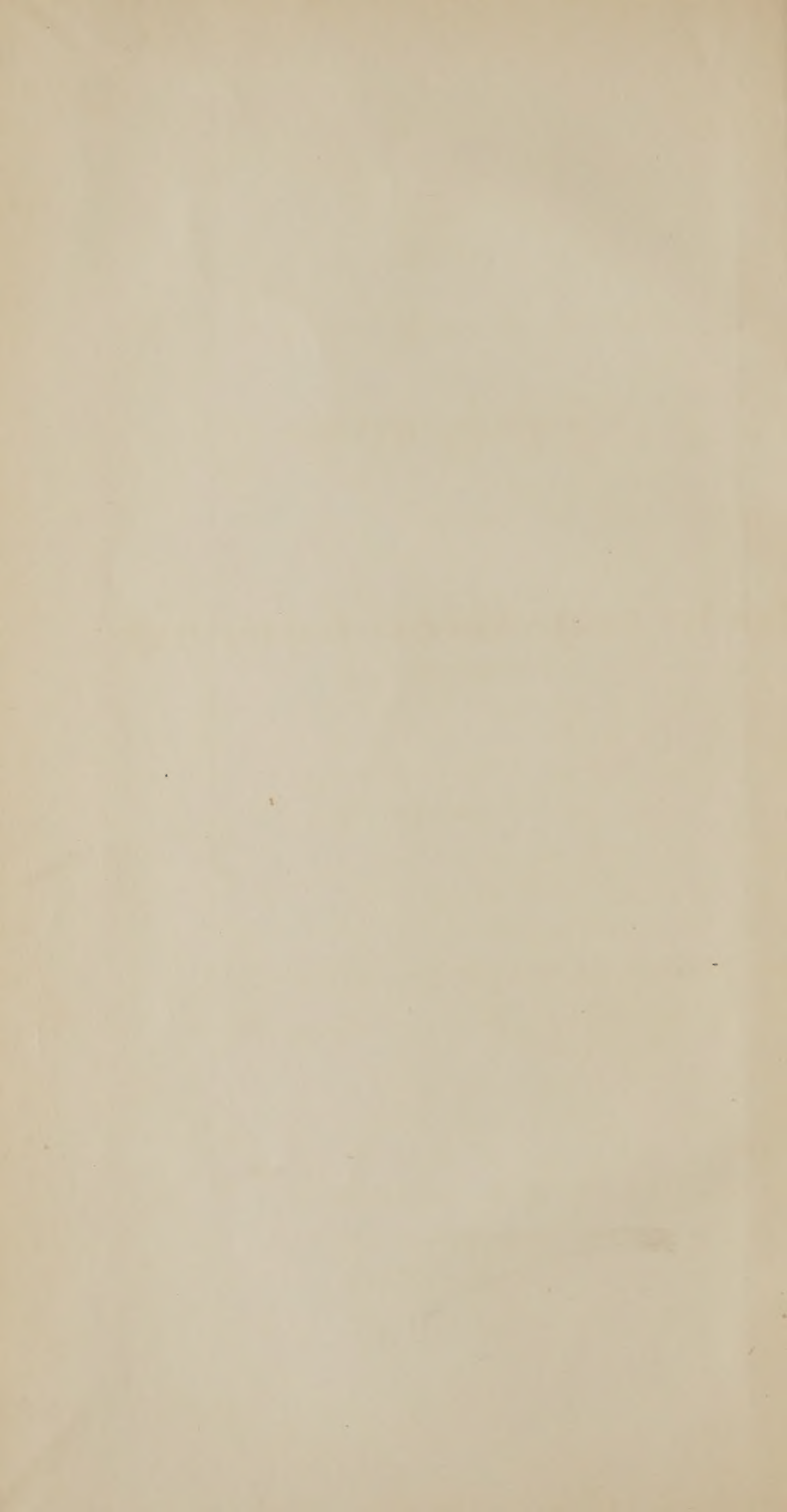








Grundzüge der Lehre

von den

höheren Gleichungen.

Grundzüge der Lehre

von den

höheren numerischen Gleichungen

nach

ihren analytischen und geometrischen Eigenschaften.

Ein Supplement zu den Lehrbüchern der Algebra und der Differentialrechnung.

Von

MORITZ WILHELM DROBISCH,

Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig.

Mit zwei Kupfertafeln.

Leipzig, 1834.

Verlag von Leopold Voss.

Vorrede.

Die Lehre von den höheren Gleichungen hat bisher in dem mathematischen Unterrichte noch nicht diejenige Stellung eingenommen, die ihr nach ihrer innern und äussern Wichtigkeit zuzukommen scheint. Wir finden sie in den älteren Lehrbüchern fast immer dürftig, in den neueren und besseren nicht ohne eine gewisse Schwerfälligkeit behandelt, die ihr keineswegs zur Empfehlung gereicht. Der Grund hiervon muss theils in dem Grade der Ausbildung der Lehre selbst, theils in gewissen systematischen Vorurtheilen gesucht werden, die das bessere Vorhandene zu benutzen verhinderten.

Was den ersten Punct betrifft, so haben zwar eine grosse Menge der ausgezeichnetsten Analysten der neueren Zeit in der Theorie der Gleichungen durch Entdeckung wichtiger und interessanter Sätze ihrem Namen ein Denkmal gestiftet; auch hat es nicht an Werken gefehlt, die mit dem Verdienst neuer Bereicherungen der Wis-

senschaft dasjenige der Sammlung, Anordnung und Beurtheilung des Zerstreuten zu vereinigen wussten, in welcher Hinsicht nur an Lagrange's treffliche *Résolution des équations numériques* erinnert werden mag; aber man findet auch mancherlei weniger fruchtbare, abstruse und theilweise blos negative oder mindestens vereinzelte Bestrebungen, die zwar oft, wegen des darin sichtbaren Aufwandes von Scharfsinn, Combinationsgabe, Gelehrsamkeit und Fleiss, ihren Urhebern sehr zur Ehre gereichen und daher alle Anerkennung verdienen, dennoch aber den wissenschaftlichen Bau im Ganzen nicht den darauf verwendeten Kräften gemäss förderten. Erst Fourier war es vorbehalten, in seiner, leider unbeendigt hinterlassenen und eines Fortsetzers und Vollenders nach den gegebenen Andeutungen des Inhalts harrenden*) *Analyse des équations déterminées* die Theorie der Gleichungen um einen mächtigen Schritt vorwärts zu führen, und zwar in einer Weise, die seine Entdeckungen dem allgemeinen Verständniss völlig zugänglich macht. Nur erst nach Erscheinung dieses nach Inhalt und Darstellung gleich ausgezeichneten Werkes liess sich hoffen, den Gedanken, das Wichtigste und Fruchtbarste von den älteren und neueren Entdeckungen über die Eigenschaften der höheren Gleichungen zu einem den Anforderungen des Unterrichts gemässen Ganzen zu vereini-

---

*) Mehrfache Verdienste hierum hat sich bereits Herr Dr. Stern erworben.

gen, auf eine nicht ganz ungenügende Art ausführen zu können.

Zugleich aber knüpft sich das Gelingen eines solchen Versuchs an die Erörterung des zweiten oben angedeuteten Punctes, nämlich an die Beseitigung gewisser herrschender Vorurtheile systematischer Art. Es sind deren vorzüglich zwei, welche hierher gehören: das erste betrifft die Stellung der Algebra zur sogenannten höheren Analysis, das andre das Verhältniss der gesammten reinen Analysis zur Geometrie.

Was nun jenes anbelangt, so brachte bekanntlich das Bedürfniss des Unterrichts, vorzüglich des mündlichen, die Zertheilung der Mathematik in elementare und höhere hervor, die, da sie keine eigentliche wissenschaftliche Eintheilung ist, sondern nur auf äusseren, der Wissenschaft selbst völlig zufälligen und daher gleichgültigen Rücksichten beruht, bei der Grenzbestimmung beider Hälften natürlich die grösste Willkür verstattet. Sonderbar aber und ohnstreitig von schädlichen Folgen war es, dass man sich meistens nicht verstehen wollte, in *den einzelnen* mathematischen Hauptdisciplinen einen elementaren und einen höheren Theil zu unterscheiden, was doch, da jede ihre einfacheren und ihre verwickelteren Lehren hat, das Natürliche und einzig Zweckgemässe gewesen wäre; sondern, gleich als ob man es mit einer wahrhaft logischen Eintheilung zu thun hätte und in den Fehler der mangelhaften Sonderung der Eintheilungs-

glieder zu verfallen befürchten müsste, Zerstükkelung scheuend, einige Wissenschaften (und unter diesen die gesammte Algebra) ganz der elementaren, andre eben so ungetrennt der höheren Mathematik zutheilte. Der Erfindungsgeist hat sich glücklicherweise nie von diesem Vorurtheil beengen lassen, wobei wir in Beziehung auf das Verhältniss der Algebra zur Differentialrechnung unter den früheren Werken nur auf Euler's *Institutiones calculi differentialis* als auf ein bekanntes Beispiel hinweisen wollen; aber wäre es geschehen, so unterliegt es keinem Zweifel, dass der Wissenschaft eine Menge der schönsten und folgenreichsten Entdeckungen entgangen seyn würden; und wer mag berechnen, wie manche glückliche Combinationen bei sonst sehr achtbaren Mathematikern vom zweiten Range durch das Ansehen dieses Vorurtheils im Keime erstickt wurden*). Indessen lässt sich nicht leugnen, dass schon seit mehreren Jahrzehnten Vieles zur Beseitigung desselben geschehen ist. Lagrange's Functionenlehre, obgleich unbequem und unnatürlich in den Anwendungen auf Geometrie und Mechanik, brachte doch, als natürliche Verallgemeinerung der Methode der unbestimmten Coefficienten, das, was früher fast für heterogen ge-

---

*) So findet selbst der gelehrte Klügel Anstoss daran, dass Kästner den Descartes'schen Satz durch Differentialrechnung beweist, und nennt dies Verfahren mehr scharfsinnig als methodisch, indess vielleicht gerade dieser Beweis zu den eigenthümlichsten und verdienstlichsten Leistungen Kästner's gezählt werden kann.

halten worden war, in eine nähere Berührung; einen gleichen Zweck hatten Arbogast's Derivationsrechnung und andere ähnliche Versuche, der Differentialrechnung eine neue, den gemeinen algebraischen Operationen näher liegende, Seite abzugewinnen und sie damit den Elementen anzureihen. Andrerseits hat man (z. B. Cauchy in seinem *Cours d'analyse algébrique*) das Unendlichkleine in strengerer Behandlung in die algebraische Analysis eingeführt, und damit den Grundbegriff der Leibnitzischen Differentialrechnung den Elementen einverleibt. Es bleibt daher eigentlich nur noch ein sehr kleiner Schritt übrig, nämlich der: ohne Umschweife anzuerkennen, dass man weit schneller zum Ziele kommt, wenn man die Anfänge der Differentialrechnung in unverhüllter Form und mit den eingeführten Bezeichnungen den ersten Elementen der Buchstabenrechnung und der Lehre von den Gleichungen der ersten Grade sogleich folgen lässt.

Eine weit entschiedenere und allgemeinere Vorliebe dagegen findet sich in Beziehung auf das, die Stellung der reinen Analysis zur Geometrie betreffende, Vorurtheil verbreitet. Die reine Analysis soll sich völlig frei halten von geometrischen Betrachtungen irgend welcher Art. Diese Ansicht scheint jetzt allgemein zu gelten. In Deutschland hat man sie auf eine noch consequentere Art durchzuführen gesucht als in Frankreich. Denn während die ausgezeichnetsten französischen Analysten, z. B. ein Lagrange, ein Cauchy, in ihren analytischen Lehrbüchern

ohne Bedenken die trigonometrischen Functionen der Trigonometrie oder der Lehre vom Kreise entlehnen, um sie dann in Reihen zu entwickeln, zur Auflösung der Gleichungen zu gebrauchen, u. dgl. m., haben mehrere deutsche Mathematiker, namentlich Thibaut, Tralles, Schweins, den Versuch gemacht, für jene transcendenten Functionen einen rein analytischen Ursprung nachzuweisen. Sind nun gleich solche Ableitungen in so fern unfruchtbar, als sie nur dem bereits Erfundenen eine neue Seite abgewinnen, sich aber mit dieser keine neue Quelle für Entdeckungen im Gebiete der Transcendenten eröffnet, als welche sich vielmehr fortwährend die Integralrechnung behauptet; so wird man ihnen doch, ohne ihren Werth zu überschätzen, Verdienst nicht absprechen können. Allein wenn wir im Allgemeinen zugeben dürfen, dass eine strenge Sonderung der allgemeinen Arithmetik von jeder geometrischen Vorstellungsweise erforderlich und erreichbar ist, so lange man es nur mit analytisch arithmetischen *Formen* und deren Umwandlung zu thun hat; so kann es dagegen nur zu leeren Abstractionen und nutzlosen Künsteleien führen, wenn man sich, sobald die *Werthe* und namentlich die *continuirlichen Folgen von Werthen* jener Formen Gegenstand der wissenschaftlichen Betrachtung werden, des geometrischen Bildes für die arithmetische Form noch entäussern will. Wir behaupten vielmehr, dass dann die Zuziehung der den Functionen entsprechenden Curven, Flächen, stetigen Folgen von Flä-

chen u. s. w.*) nicht mehr beliebig, sondern schlechterdings nothwendig ist; und zwar ganz im Allgemeinen schon aus dem einfachen Grunde, weil wir eine *stetige* Folge von Zahlwerthen nie wirklich berechnen können, sondern immer nur gesonderte, wenn auch noch so nahe liegende, Werthe erhalten. Auch würde man für manche geometrisch unmittelbar klare Vorstellungen nur mit grossen Umschweifen rein arithmetische ihnen entsprechende Begriffe erhalten, die jedenfalls viel dunkler seyn würden als das, was sie ausdrücken sollen; so wie umgekehrt in viele arithmetische Begriffe erst Licht und Zusammenhang durch ihre Veranschaulichung kommt. Wie dunkel und unvollendet müsste z. B. die Vorstellung von der Bedeutung des Null- und Unendlich-Werdens der Differentialquotienten bleiben, wenn nicht das geometrische Bild durch die Biegungen, Wendepuncte, Spitzen u. s. w. der der Function entsprechenden Curve zu dem Mittelbaren das Unmittelbare hinzufügte. Auch ist es in solchen Werken, die sich die strenge Enthaltsamkeit von jeder geometrischen Vorstellungsart zum Gesetz gemacht haben, recht deutlich zu bemerken, wie viel Mühe es ihnen kostet, dies Gelübde zu halten, und wie am Ende doch noch

*) Ueber die Versinnlichung der Functionen von drei und mehreren Veränderlichen hat Péclet einen interessanten Aufsatz in Gergonne's *Annales de Mathém. T. XIV. p.* 65 gegeben, welchem der Herausgeber einige geistreiche Bemerkungen beigefügt hat.

die Natur der Sache, da ihr der Eingang in den Text versagt ist, sich in Noten Luft macht. Wenn aber andre Schriften diese Klippe dadurch vermeiden, dass sie nur Formeln auf Formeln bis zur abstrusesten Allgemeinheit aufbauen, ohne einer Beziehung derselben zum Besondern, einer Untersuchung über ihre Zahlwerthe auch nur zu gedenken, so leuchtet die Gehaltlosigkeit dieser Manier klar genug ein, wenn man überlegen will, dass der objective Zweck analytischer Formeln nur die Berechnungen der sämmtlichen einzelnen Fälle, zu denen sie die Regeln bilden, seyn kann, das geistige Vergnügen aber und die Uebung, welche der Aufbau solcher Formeln von hohler Allgemeinheit verschaffen mag, ihnen keinen wahren wissenschaftlichen Werth geben können.

Die Geschichte der Theorie der höheren Gleichungen bestätigt mehrfach die Natürlichkeit und Richtigkeit vorstehender Ansicht. Nie haben sich die krummen Linien und Flächen ganz aus dieser Lehre verdrängen lassen, und immer sind sie mit Nutzen in Anwendung gebracht worden. Durch Betrachtung der Eigenschaften der dem linken Theil der höheren Gleichungen entsprechenden parabolischen Curven fanden Stirling und de Gua verschiedene Kennzeichen sowohl der Realität sämmtlicher Wurzeln als auch des Vorhandenseyns imaginärer (s. u. §§. 122—126). Lagrange gab ihnen zwar eine analytische Darstellung (s. §. 120), wie einst Newton und seine Zeitgenossen dem auf analytische Weise Erfundenen eine geometrische; aber man bemerkt

wohl, dass dies nicht der ungekünstelte Weg der ersten Entdeckung ist, der hier überdies zu einem viel bestimmteren Resultate führt. Cauchy hat einen analytischen Beweis dafür gegeben, dass jede höhere Gleichung eine Wurzel der Form $t+u\sqrt{-1}$ hat (§§. 71—74); aber der geometrische von Gauss (§§. 75—78) stellt, unsers Ermessens, die Sache in ein viel helleres Licht. Fourier hat durch Betrachtung der Curven ein Unterscheidungskennzeichen der reellen und der imaginären Wurzeln entdeckt (§. 146), das die früheren Versuche von Lagrange und Waring (§§. 110—113) weit hinter sich zurücklässt; es würde aber vieler Künsteleien bedürfen, um, ohne Verletzung der Gründlichkeit, dasselbe auf einen rein analytischen Ursprung zurückzuführen. Für Newton's analytisches Parallelogramm hatte Lagrange einen, allerdings schönen, analytischen Beweis gegeben und ihm damit die constructive Form genommen; aber Fourier findet es vortheilhaft*), bei Ergänzung dieser Theorie zu constructiven Hülfsmitteln zurückzukehren.

Bei diesen Gründen und solchen Auctoritäten wird es keiner weitern Entschuldigung bedürfen, wenn in der nachfolgenden Schrift die Gleichungen fast immer in Verbindung mit den ihnen entsprechenden Curven betrachtet worden sind. Es ist jedoch hierbei stets eine planlose Vermischung des rein Analytischen mit dem Geometrischen vermieden, vielmehr so viel wie

---

*) *Analyse des équat. P. I. Expos. synopt. p.* 49 *suiv.*

möglich ein Parallelismus beider Betrachtungsweisen beobachtet worden, der hoffentlich nicht ohne Belehrung für den Anfänger seyn wird.

Wenn man überhaupt an der rechnenden Geometrie rühmt, dass in der von ihr nachgewiesenen Wechselbeziehung zwischen den Formeln und deren räumlicher Versinnlichung ungemein viel Anziehendes und Lehrreiches enthalten sey, so hätte die Lehre von den höheren Gleichungen, die, sofern sie es insbesondere mit den parabolischen Curven zu thun hat, einen der einfachsten, leichtesten und interessantesten Abschnitte jener ausgedehnten Wissenschaft bildet, im Unterrichte nicht so vernachlässigt, und selbst das Aeltere nicht so lange in Vergessenheit gelassen werden sollen. Seit Kästner*) aber, der de Gua's Entdeckungen reproducirte und denselben einiges Eigenthümliche hinzufügte, scheinen die Lehrbücher diese Art der Auffassung nicht weiter sonderlich beachtet zu haben, was nach dem Obigen auch völlig erklärlich ist. Durch Fourier's fruchtbare Behandlung hat nun diese Seite der Theorie einen ganz neuen Aufschwung erhalten, der nicht blos wegen der Neuheit der Resultate, sondern auch der Strenge und Consequenz der Methode, ihr, auch ganz abgesehen von den vorher entwickelten allgemeinen Gründen, den gerechtesten Anspruch auf volle Berücksichtigung beim höheren mathematischen Unterricht geben würde. Die vollständige

*) Analysis des Unendlichen §. 163 ff.

Entwickelung dieser Fourier'schen Lehre, so weit sie das mehrmals erwähnte Werk zur Darstellung bringt (was glücklicherweise mit völliger Abgeschlossenheit in Beziehung auf die *einfachste* Auflösung der numerischen Gleichungen geschehen ist), in den drei letzten Abschnitten unsrer Schrift wird vielleicht derselben, da hiermit, unsers Wissens, diese Lehren zum erstenmal auf deutschen Boden verpflanzt werden, auch bei manchem geübteren Leser einiges Interesse geben. Schon eine flüchtige Vergleichung mit Fourier's Werke wird übrigens zeigen, dass hier auch nicht einmal in kleinen Theilen eine Uebersetzung gegeben wurde. Vielmehr suchte der Verfasser, wie sonst, auch diesen Stoff nach seinen Zwecken zu verarbeiten, und, ohne willkürliche Umgestaltung der ursprünglichen Darstellung, bei grösserer Kürze, obwohl unvermindertem Reichthum (der vielmehr durch eine bedeutende Anzahl neuer Beispiele vermehrt wurde), alle wesentlichen Momente des Originals selbstständig aufzufassen und mit der erforderlichen Klarheit vorzutragen.

Ausser dieser Verbindung des Geometrischen mit dem Analytischen, gemäss dem neuesten Zustande der Wissenschaft, darf unter die Eigenthümlichkeiten dieses Lehrbuchs vielleicht auch die Behandlung des Imaginären und namentlich der imaginären Wurzeln der Gleichungen gerechnet werden. Die imaginären Formen als blosse *symbolische Ausdrücke* zu betrachten, denen nur analytische Gültigkeit zukommt, d. h. die an sich ohne Realität, ja sogar widersprechend,

nur die Uebergangspuncte seyn sollen, durch die man zu neuen Wahrheiten gelangt, — diese Ansicht kann nicht mehr als vollkommen ausreichend betrachtet werden. Was namentlich die imaginären *Wurzeln* betrifft, so hat schon de Gua wenigstens die Thatsache erkannt, dass ihre Entstehung mit dem Verschwinden von Durchschnitten der parabolischen Curven mit der Abscissenaxe zusammenhängt; wir haben daher aus dieser Bemerkung die Berechtigung ziehen zu können geglaubt, sie mit dem Namen *verloren gegangener reeller Wurzeln* der Gleichung zu belegen, welcher Ausdruck uns angemessener schien als der von *fehlenden Wurzeln*, wie sie Fourier nennt, wobei die Frage, *warum* manchen Gleichungen Wurzeln fehlen mögen, sich unwillkürlich aufdrängt, ohne beantwortet zu werden, indess, wenn man die Gleichung hinsichtlich ihrer Coefficienten und die ihr entsprechende Curve hinsichtlich ihrer Biegungen als der Veränderung unterworfen betrachtet, der Verlust von Wurzeln und Durchschnitten als eine natürliche Folge davon erscheint. *Diese* Ansicht weist jedoch noch keineswegs für die Form $t+u\sqrt{-1}$ eine reelle Bedeutung nach. Dies ist jedoch schon früher von mehreren Mathematikern, namentlich von Bué*) im Jahre 1805, von Mouray**),

---

*) *Philosophical Transactions for* 1806 *p.* 23.

**) *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires. Paris* 1828.

1828, und von Warren*), 1829, in der Weise versucht worden, dass, gleichwie man der positiven und negativen Einheit die Bedeutung giebt, entgegengesetzte Lagen auf der zur Axe gewählten Geraden, in Beziehung auf den festen Anfangspunct, zu bezeichnen, durch $\sqrt{-1}$ die Einheit in der auf der Axe der positiven und negativen Werthe senkrechten Richtung angezeigt werden soll. Dennoch ist diese Ansicht bis jetzt wenig beachtet worden, vielleicht weil es ihr bisher an strenger Begründung und fruchtbaren Anwendungen mangelte und sie mehr als eine geistreiche Analogie als eine unzweifelhafte Thatsache erschien. Neuerdings hat auch Gauss**), der auf diese Veranschaulichung des Imaginären schon vor dem Jahre 1799 gekommen zu seyn scheint, dieselbe Ansicht in einer Form vorgetragen, welche zeigt, dass dieser grosse Geometer, gleich Lagrange, auch auf die *Metaphysik* seiner Wissenschaft Werth legt und *deren* Probleme mit eben so viel philosophischer Tiefe, als die eigentlichen mathematischen mit erfindungsreichem Scharfsinn zu behandeln weiss. Indess haben wir hierüber die wichtigsten Aufschlüsse erst noch zu erwarten, indem bis jetzt nur von ihm in wenigen, aber scharfen Zügen die metaphysische Grundlage der Theorie entworfen worden ist. Vorstellungen dieser Art aber müssen jetzt

*) *Philos. Transact. for* 1829 *p.* 241 *und* 339.

**) Göttinger gelehrte Anzeigen 1831. St. 64. *Commentatt. Soc. Gotting. Rec. Vol. VII.: theoria residuor. biquadrat.* besonders *art.* 38.

den meisten Mathematikern sehr fremd geworden seyn, da selbst eine so treffliche Exposition, ohngeachtet der Auctorität ihres Urhebers, bei Vielen mehr Verwunderung als Ueberzeugung oder selbst nur Glauben an die Richtigkeit der Idee hervorgebracht zu haben scheint. Es musste uns daher erwünscht seyn, durch die blos specielle Beziehung, in der das Imaginäre in der Theorie der Gleichungen vorkommt, nicht genöthigt zu seyn, bis auf die allgemeinste Begründung der Construction der imaginären Formen überhaupt zurückzugehen, vielmehr die Gültigkeit der von den vorgenannten Gelehrten vorgetragenen Ansicht für imaginäre Wurzeln durch eine einfache Thatsache belegen zu können (§ 191). Die Keime hierzu liegen schon in einer der frühesten Schriften von Gauss (§. 75*)) und nur wenige Schritte führen von dort aus zur allgemeinen Vorstellung. Dass aber von dieser Ansicht aus viel Licht über eine Menge analytischer und geometrischer Paradoxen, welche durch die Imaginären, sofern man sie nur als unmögliche Grössen betrachtet, entstehen, sich verbreiten wird, ist kaum zu bezweifeln.

Um sonst noch Leser und Beurtheiler zum Voraus auf Einiges aufmerksam zu machen, was dieses Buch besitzt und was ihm abgeht, so lag es, was zuerst den *Stoff* betrifft, nicht in der Absicht des Verfassers, eine Monographie der höheren numerischen Gleichungen zu schreiben. Es ist daher Manches übergangen, was sich theils in den bessern Lehrbüchern der Algebra findet,

wie z. B. die Auflösung der numerischen Gleichungen vom dritten und vierten Grade, theils was nur von einem höhern theoretischen Interesse ist, wie etwa Ruffini's und Abel's Beweise der Unmöglichkeit einer directen Auflösung der den vierten Grad übersteigenden Gleichungen, die allgemeinen Untersuchungen über die Formen der Wurzeln u. dgl. m. Andrerseits ist aber auch die von Lagrange mit so vielem Beifall eingeführte Benutzung der Kettenbrüche zur Auflösung der höhern Gleichungen unberücksichtigt geblieben, indem es hier nur um die Entwickelung der einfachsten Grundlagen zu thun war, auch, nach den von Fourier gegebenen Andeutungen, dieser Gegenstand eine viel umfassendere Behandlung erforderte, die ihm denn auch überdies schon vor der Erscheinung dieses Werkes durch Stern*) geworden ist. Den Schlussstein gegenwärtiger Schrift bildet daher Fourier's Verbesserung der Newton'schen Approximationsmethode. Diese ist ohne Zweifel die einfachste Lösung des Problems; die gemeine Wurzelausziehung ist ihr besonderer Fall (§. 158), und sie selbst daher die natürliche Erweiterung des arithmetischen Algorithmus; sie verwirklicht also, und zwar mit einer Methodik, die musterhaft zu nennen ist, das, was einst Vieta (in der Schrift: *de numerosa potestatum affectarum resolutione*) zuerst versuchte. Dies alles trifft jedoch nur die

*) Theorie der Kettenbrüche und ihrer Anwendung. Berlin, 1834.

reellen Wurzeln. Was die Auffindung der imaginären anbelangt, so ist nach Vortrag von Lagrange's Berechnungsart einiges Neue hinzuzufügen versucht worden. Von einer Anwendung der recurrirenden Reihen, welche, wie Fourier*) zuerst bemerkt und Stern**) nach seinen Andeutungen erwiesen hat, auf directem Wege zur Berechnung der imaginären Wurzeln führen, konnte nach dem Plane dieser Schrift natürlich nicht die Rede seyn. — Was ferner die *Methode* des Buchs betrifft, so sollte nicht ein wissenschaftliches Kunstwerk aufgestellt werden, in dem der Einheit des Princips und der Methode jede andre Rücksicht geopfert würde. Allerdings fördern solche Werke nicht nur die Wissenschaft, indem sie zu ihrer formellen Vervollkommnung beitragen, sondern sie wirken auch bildend auf den Lernenden, indem sie in ihm den Sinn für Systematik entwickeln. Aber gewiss noch wichtiger ist es, frühzeitig den Erfindungsgeist zu wecken. Dazu ist es aber nöthig, dem Schüler mehr als Ein Instrument in die Hände zu geben und den Gebrauch eines jeden zu lehren: denn die Geschichte der Mathematik zeigt, dass die Erfinder sich sehr verschiedener, oft selbst nicht ganz streng wissenschaftlicher Methoden bei ihren Forschungen bedient haben; es würde daher eine sehr schädliche Pedanterie seyn, dem Anfänger aus Systemsucht den Reichthum der vorhande-

*) *Analyse des équat. p. 74.*

**) Theorie der Kettenbrüche §. 101. vergl. Crelle's Journal XI, 301.

nen Mittel zu verkümmern. Ueberdies beruht unbezweifelt die anerkannte Festigkeit der Mathematik nicht sowohl auf einer vorzüglich tiefen Begründung (denn ihre Principien sind metaphysisch und daher bis jetzt immer nur Gegenstand der Meinungen und Ansichten gewesen) als vielmehr auf dem trefflichen Zusammenhang, der sich durch die Uebereinstimmung der Resultate aus den verschiedensten Anfängen und mannichfaltigsten Methoden bewährt. Der Gang dieser Schrift besteht daher in einer gewissermassen historischen Entwickelung, indem es versucht wurde, die verschiedenen Methoden im Ganzen so vorzutragen, dass eine jede in Beziehung auf die nächstvorhergehende als ein neuer Culturfortschritt erscheint, sey es nun, dass sie ihr historisch wirklich als ein solcher gefolgt ist, oder dass sie ihr wenigstens hätte folgen können. Diese heuristischgenetische Darstellung, welche der Verf. durch seine sämmtlichen mathematischen Vorträge durchzuführen sucht, scheint dem Gegenstande, da er den Lernenden auf dem kürzesten Wege zur Forschung anleitet und damit wissenschaftlich selbstständig macht, eigenthümliches Leben und Interesse zu geben, und, da sie zu dem immer Vollkommneren führt, die Spannung der Aufmerksamkeit fortwährend zu steigern. — Dieselbe Rücksicht, dieses Buch für den Anfänger möglichst instructiv zu machen, veranlasste auch, auf die Zahl und Auswahl von Beispielen einigen Fleiss zu wenden. Reichthum und Zweckmässigkeit der Beispiele gehört zu den grossen Vorzügen von Euler's Schriften, und es lässt sich wohl kaum in Abrede

stellen, dass selbst für den geübten Mathematike
manche besondere Umstände der allgemeinen Sätz
und Regeln erst in der Anwendung auf Beispiel
vollkommen klar werden. — Endlich sind aus dem
selben Grunde, ohne leeren Citatenprunk zu trei
ben, überall die Quellen, aus denen der Verfasse
schöpfte, treulich angegeben. Der Leser wird näm
lich hierdurch auf diejenigen Hauptwerke verwie
sen, deren Studium für jeden, der sich der Wis
senschaft ganz widmen will, durch keine auch noch
so geschmeidige reproducirende Darstellung ent
behrlich gemacht werden kann. Es würde die
kaum der Erwähnung verdienen, erschienen nich
von Zeit zu Zeit Bücher, die, obgleich oft nur i
geringfügigen Aeusserlichkeiten eigenthümlich, sich
doch durch Hinweglassung jeder literarischen Nach
weisung das Ansehen zu geben suchen, als wären
sie ganz aus eigner Kraft und aus eignem Boden
emporgestiegen. Dagegen überhebt die getreue An
gabe der benutzten Schriften den Verf. der kleinli
chen Nachweisung der Einzelheiten, durch die e
zu dem Vorhandenen Einiges aus eigenen Mitteln
hinzuzufügen versucht hat. — Gelingt es diese
Schrift, sich das Zeugniss der Gründlichkeit und
Brauchbarkeit zu erwerben, so sind die Wünsche
des Verf. befriedigt, und er darf dann hoffen, dass
der Gehalt des Buchs des ansprechenden Gewandes,
das ihm der liberale Sinn des Herrn Verlegers gege-
ben hat, nicht ganz unwürdig wird befunden werden

Leipzig, im März 1834.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung.

§. 1.

Was man unter *höheren algebraischen Gleichungen* zu verstehen hat, wie dieselben nach der Zahl der in ihnen vorkommenden Grössen in *bestimmte* und *unbestimmte* und die ersteren nach der Menge der Einheiten des höchsten Exponenten der Unbekannten in Gleichungen des *ersten*, *zweiten*, *dritten Grades* u. s. w. eingetheilt werden, ist aus den Lehrbüchern der Algebra bekannt. Alle in gegenwärtiger Schrift anzustellende Untersuchungen werden sich auf bestimmte Gleichungen, also auf solche beschränken, in denen nur Eine Unbekannte vorkommt. Als allgemeinste Form derselben kann die folgende gelten:

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + a_{m-1} x + a_m = 0,$$

in welcher die Grösse m immer eine *ganze positive Zahl* bedeuten soll. Die Coefficienten a_0, a_1 .... a_{m-1}, a_m, können im Allgemeinen sowohl *Zahlen* als Aggregate von *Buchstabenausdrücken* darstellen, deren allgemeines Glied die Form $Ha^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ hat. Im ersten Falle heisst die Gleichung eine *numerische*, im zweiten eine *literale*. Nur mit jenen werden wir es zu thun haben. Noch wollen wir die Bestimmung festsetzen, dass eine Gleichung, in welcher die Unbekannte von ihrer höchsten Potenz abwärts in allen successiven Potenzen bis zur 0ten vorkommt,

vollständig, wenn aber das Gegentheil statt findet, *unvollständig* heissen soll.

§. 2.

Auf algebraische Gleichungen wird man zwar durch unzählige Aufgaben gelegentlich geführt; ja jede solche Gleichung stellt eigentlich eine Aufgabe dar, nämlich die, den Werth der Unbekannten anzugeben, durch dessen Substitution sie verificirt, d. i. der linke Theil derselben wirklich null wird. Systematisch genommen kann aber als die einfachste, natürlichste und durchgreifendste Ansicht von dem Wesen der höhern Gleichungen (auch die transcendenten mit eingeschlossen) ohnstreitig diejenige gelten, welche sie als besondere Werthe (nämlich Nullwerthe) der Function betrachtet, als welche sich ihr linker Theil darstellt, sobald man die darin vorkommende Unbekannte als eine unabhängige Veränderliche betrachtet. Hiernach würde also z. B. die Gleichung

$$x^4+10x^3+19x^2-8x+7=0$$

als besondrer Werth der Function y von x anzusehen seyn, die durch die Gleichung

$$y=x^4+10x^3+19x^2-8x+7$$

dargestellt wird. Ebenso kann die Gleichung

$$y^2+ayx+bx^2+cy+dx+e=0$$

als ein besondrer Werth der Function

$$u=y^2+ayx+bx^2+cy+dx+e$$

erscheinen; als derjenige nämlich, welcher erhalten wird, wenn man $u=0$ setzt und die unter dieser Bedingung statt findende Relation zwischen x und y erörtert.

Unter diesem Gesichtspuncte werden wir in der Folge häufig den linken Theil der allgemeinen Gleichung

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0$$

durch $f(x)$ abgekürzt bezeichnen; auch zuweilen diesen Ausdruck mit dem einfachen Buchstaben y vertauschen.

Hiernach wird uns also die Entwickelung der Bedingungen, unter welchen die *ganze rationale* Function

$$y = f(x)$$

null wird, vorzugsweise beschäftigen.

§. 3.

Nach den aus den Elementen der analytischen Geometrie allgemein bekannten Lehren lassen sich die Werthe der Function $y = f(x)$, wie sie den successiven Werthen der Veränderlichen entsprechen, jederzeit durch die zusammengehörigen Abscissen und Ordinaten einer krummen Linie veranschaulichen. Sey nämlich (Fig. 1.) XX' die Abscissenaxe, die darauf senkrechte YY' die Ordinatenaxe, mithin der Durchschnitt beider O der Anfang der Coordinaten; werde ferner die rechte Seite OX' für die positive der Abscissen, die obere OY' für die positive Seite der Ordinaten angenommen, so wird man, wenn man nach diesen Voraussetzungen, nachdem irgend eine willkürliche begrenzte Gerade als Maass zum Grunde gelegt worden ist, die zusammengehörigen Werthe von x und y beziehlich als Abscissen und Ordinaten construirt, eine Folge von Puncten erhalten, welche in einer zusammenhängenden Linie liegen, die, sobald der höchste Exponent von x in der Function $f(x)$ grösser als 1, immer eine *krumme* ist. So vielmal diese Curve die Abscissenaxe schneidet, so vielmal wird die Ordinate $y = 0$; so vielmal also wird der vorgelegten Gleichung $f(x) = 0$ Gnüge geleistet. Die (positiven und negativen) Abscissen der Durchschnittspuncte der Curve mit der Abscissenaxe entsprechen demnach den (positiven und negativen) reellen Wurzeln jener Gleichung. Die Figur stellt die besondere Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

dar, welche die drei reellen Wurzeln -2, $+1$, $+3$ hat. Die zu $OP = 4$ gehörige Ordinate PM ist $= +18$; zu $OP' = -3$ gehört $P'M' = -24$. Alle Curven die-

ser Art, deren Gleichung die Form $y = f(x)$ hat, w $f(x)$ in der Bedeutung des §. 2. zu nehmen ist, heis sen *parabolische Curven.*

§. 4.

Dieser geometrischen Auslegung der Gleichung

$$y = a_0\ x^{m-1} + a_1\ x_{m-1} + \dots + a_{m-1}\ x + a_m$$

gemäss ist noch Folgendes vorläufig zu bemerken. Da y eine Linie bedeutet, so muss nach dem Princip der Homogeneität auch der rechte Theil der Gleichung mithin auch jedes einzelne Glied desselben, eine Linie darstellen. Da nun aber auch x eine Linie bedeutet so muss zwar a_m ebenfalls eine *Linie*, aber a_{m-1} eine *abstracte Zahl*, a^{m-n} eine Grösse von der *ersten ne gativen Dimension*, d. i. eine Zahl dividirt durch eine Linie, a_{m-n} eine Grösse von der *zweiten negativen Dimension*, d. i. eine Zahl dividirt durch ein Produc von zwei Linien u. s. f., a_1 eine Grösse der $(m-2)$ten a_0 eine Grösse der $(m-1)$ten negativen Dimension seyn. Ist daher, wie gewöhnlich, die Gleichung in der Form

$$x^m + a_1\,x^{m-1} + \dots + a_{m-1}\,x + a_m = 0$$

gegeben, wo 1 der Coefficient von x^m zu seyn scheint so ist diese 1 unter der Form $\frac{1}{1^{m-1}}$ zu denken, in wel cher der Zähler die unbenannte Einheit, die 1 des Nenners aber das Längen-Grundmass bedeutet.

§. 5.

Die Untersuchungen über die Wurzeln der Glei- chungen sind daher durch vorstehende Ansichten auf die allgemeineren über die successiven Werthe gan- zer Functionen zurückgeführt. Die hieraus zu gewin- nenden Ergebnisse aber werden immer einer anschau- lichen Erläuterung fähig, ja es wird sogar umgekehrt möglich seyn, durch Betrachtung der Figuren zu wich- tigen und allgemeinen Resultaten zu gelangen. Hier-

bei bedarf man jedoch durchgängig wenigstens der ersten Elemente der Differentialrechnung und ihrer Anwendung auf die Theorie der krummen Linien. Obgleich dieselben so einfach sind, dass sich der Anfänger unter zweckmässiger Leitung ihrer weit leichter bemächtigt, als so mancher verwickelterer Theorien, die zur Elementaralgebra gerechnet zu werden pflegen, so wollen wir doch, um die Früchte dieser Lehren einem grösseren Kreise von Lesern zugänglich zu machen, in den nächsten Abschnitten versuchen, die Principien der Differentialrechnung nebst den ihr unmittelbar vorhergehenden und folgenden Lehren, *in dem Umfange, wie es uns hier Bedürfniss ist*, mit möglichster Strenge, Klarheit und Einfachheit zu entwickeln. Für den Kenner wird sich in unsrer Behandlung vielleicht hin und wieder einiges Eigenthümliche finden.

Erster Abschnitt.

Von den Grenzwerthen polynomischer Ausdrücke.

---

§. 6.

Jeder nach Potenzen von x geordnete polynomische Ausdruck muss entweder nach den steigenden oder fallenden Potenzen dieser Grösse fortschreiten. Die Exponenten derselben aber können sowohl ganze als gebrochene, positive als negative, ja selbst irrationale seyn; imaginäre können wir für unsre Zwecke unberücksichtigt lassen. Enthalte das Polynom zunächst nur die successiven ganzen positiven Potenzen in der natürlichen Zahlenreihe, also steigend geordnet, so ist die einfachste Form, die hier vorkommen kann, die geometrische Progression

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots\ldots,$$

die, wenn sie ohne Ende fortgeht, durch Entwickelung des Bruches $\frac{a}{1-x}$ entsteht. Setzt man aber die Entwickelung nur bis zu einem beliebigen $m$ten Gliede ax^{m-1} fort, so bleibt ein Rest. Es wird nämlich alsdann

$$\frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + \ldots . + ax^{m-1} + \frac{ax^m}{1-x}$$

So lange hier nun x positiv und kleiner als 1 (so lange die Reihe convergirt), so lange behält auch der Aus-

druck $\frac{ax^m}{1-x}$ einen endlichen Werth, dessen Grenze aber, wenn m ins Unendliche wächst, null wird. Dann also ist $\frac{a}{1-x}$ die Summe der unendlichen geometrischen Reihe und, für jeden bestimmten Werth von m, $\frac{ax^m}{1-x}$ *die Summe der unzählig vielen auf* ax^{m-1} *folgenden Glieder.* Macht man daher

$$ax^{m-1} > \frac{ax^m}{1-x}, \text{ d. i. } x < \frac{1}{2},$$

so ist jedes Glied der unendlichen geometrischen Reihe

$$a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots . \text{ inf.}$$

grösser als die Summe aller folgenden.

Gilt diese Eigenschaft von der unendlichen Reihe, so muss sie noch mehr gelten, wenn die Reihe abbricht. Gilt sie, wenn die Glieder sämmtlich durch positive Zeichen verbunden sind, so gilt sie noch mehr für eine Reihe, in der neben den positiven auch negative Zeichen vorkommen, da hierdurch der Zahlwerth der Summe in Vergleich mit durchgängig positiven Zeichen vermindert wird.

§. 7.

Vermöge des eben erhaltenen wichtigen Satzes können wir nun auch für die allgemeinere Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots . + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots .$$

jederzeit Werthe von x finden, die jedes beliebige Glied grösser machen als die Summe aller folgenden, mag nun die Reihe abbrechen oder ins Unendliche gehen. Wir weisen dies an den einzelnen Fällen nach.

1) Die Reihe breche mit irgend einem Gliede, z. B. $a_{m-1} x^{m-1}$ ab. Die Coefficienten a_0, a_1, a_2 etc. mögen hierbei beliebig steigen oder fallen, doch sollen sie zunächst nur positiv seyn. Die geometrische Reihe hatte das Eigenthümliche, dass in ihr der Quo-

tient aus je zwei benachbarten Coefficienten immer derselbe $= \frac{a}{a} = 1$ blieb. Um nun die vorliegende Reihe mit jener zu vergleichen, bilden wir auch in dieser die successiven Quotienten, nämlich

$$\frac{a_1}{a_0},\ \frac{a_2}{a_1},\ \ldots\ldots\ \frac{a_{m-1}}{a_{m-2}}.$$

Sey nun der grösste unter ihnen $\frac{a_p}{a_{p-1}}$ oder, wie wir ihn abgekürzt bezeichnen wollen, q, so ist

$$a_1 < a_0 q,\ a_2 < a_1 q,\ \ldots\ a_{m-1} < a_{m-2} q,$$

also auch

$$a_1 < a_0 q,\ a_2 < a_0 q^2,\ \ldots\ a_{m-1} < a_0 q^{m-1}$$

daher

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{m-1} x^{m-1}$$
$$< a_0 + a_0 q x + a_0 q^2 x^2 + \ldots\ldots + a_0 q^{m-1} x^{m-1}.$$

Nehmen wir nun in der zweiten dieser Reihen $qx < \frac{1}{2}$, d. i. $x < \frac{1}{2q}$, so wird, nach §. 6, a_0 grösser als die Summe aller folgenden Glieder, mithin auch, da

$$a_0 q x + a_0 q^2 x^2 + \ldots a_0 q^{m-1} x^{m-1} > a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{m-1} x^{m-1}$$
$$a_0 > a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{m-1} x^{m-1},$$

d. i. in der vorgelegten Reihe das Anfangsglied grösser als die Summe aller folgenden. Dasselbe ist leicht für jedes andere Glied, z. B. $a_n x^n$ nachzuweisen. Denn da

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots + a^{m-1} x^{m-1} =$$
$$= a_0 + a_1 x + \ldots + x^n (a_n + a_{n+1} x + \ldots + a_{m-1} x^{m-n-1})$$

so folgt, da q der grösste Quotient der *ganzen* Reihe war, dass, wenn man $x < \frac{1}{2q}$ nimmt, auch in der Reihe

$$a_n + a_{n+1} x + \ldots + a_{m-1} x^{m-n-1}$$

das Anfangsglied grösser als die Summe aller folgenden, mithin

$$a_n x^n > a_{n+1} x^{n+1} + a^{n+2} x_{n+2} + \ldots + a_{m-1} x^{m-1},$$

d. i. *jedes Glied der geschlossenen Reihe*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{m-1} x^{m-1}$$

für reelle Werthe von x, *die* $< \frac{1}{2q}$, *grösser als die Summe aller nachfolgenden Glieder wird.*

§. 8.

Sey 2) die Reihe des vorigen Paragraphen unendlich, also

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots \text{ inf.},$$

so werden auch dann noch die bisherigen Schlüsse gelten, wenn wir im Stande sind, auch für diesen Fall den grössten Quotienten aus je zwei benachbarten Coefficienten, $q = \frac{a_p}{a_{p-1}}$ zu finden: denn der Satz in §. 6, auf welchem jene Schlüsse beruhen, gilt für die unendliche wie für die abbrechende Reihe. Diese Bedingung wird sich aber in folgenden Fällen erfüllen lassen.

a) Wenn die successiven Quotienten ohne Ende abnehmen. Denn da dann

$$\frac{a_1}{a_0} > \frac{a_2}{a_1} > \frac{a_3}{a_2} > \ldots\ldots \text{ inf.}$$

so ist $\frac{a_1}{a_0} = q$ der grösste Quotient. Hierher gehört z. B. die Reihe

$$1 + \frac{1}{1} x + \frac{1}{1.2.} x^2 + \frac{1}{1.2.3} x^3 + \ldots\ldots \text{ inf.}$$

in der $\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ u. s. f.

b) Wenn die Quotienten zwar ohne Ende, aber nicht ins Unendliche wachsen, sondern immer unter einem angeblichen endlichen Werthe bleiben, dem sie sich zwar ohne Ende nähern, ohne ihn jedoch je ganz zu erreichen. In diesem Falle ist dieser Werth, der die Grenze für sämmtliche Quotienten bildet, für q anzunehmen. Von dieser Art ist die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} x + \frac{1.\ 3}{2.\ 4} x^2 + \frac{1.\ 3.\ 5}{2.\ 4.\ 6} x^3 + \ldots \text{ inf.},$$

in der zwar

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6} \text{ u. s. w.},$$

offenbar aber alle diese Quotienten sich nur mehr un mehr der Einheit nähern, ohne sie je völlig zu er reichen.

c) Selbst in dem Falle, dass die Quotienten ei ner Reihe bis zu einer gewissen Gränze wüchsen dann aber gleich blieben oder wieder abnähmen, so dass also etwa

$$\frac{a_1}{a_0} < \frac{a_2}{a_1} < \frac{a_3}{a_2} < \ldots\ldots < \frac{a_p}{a_{p-1}}, \text{ aber}$$

$$\frac{a_p}{a_{p-1}} \geqq \frac{a_{p+1}}{a_p} \geqq \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} \geqq \ldots\ldots \text{ inf.}$$

würde der Satz gelten, da hier offenbar $q = \frac{a_p}{a_{p-1}}$ gesetzt werden könnte.

Es bleibt also als Ausnahme nur der Fall übrig, in welchem die successiven Quotienten $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2} \ldots\ldots$ inf. *ohne Ende und zugleich ins Unendliche wachsen.*

§. 9.

3) Kommen in der Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots$, deren Coefficienten in den beiden vorstehenden §§. als positiv betrachtet wurden, zum Theil negative Coefficienten vor, so gelten die bewiesenen Sätze, aus gleichem Grunde als der am Ende von §. 6 angegebene ist, um so stärker (*a fortiori*). Fassen wir daher jetzt Alles zusammen, so können wir folgenden Satz aussprechen:

In jeder nach den successiven ganzen Potenzen von x in steigender Folge der Exponenten geordneten, geschlossenen oder unendlichen Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots,$$

in welcher die Coefficienten nicht ins Unendliche wachsen, übrigens aber positiv oder negativ seyn

mögen, kann man x immer einen solchen Werth beilegen, dass jedes beliebige Glied der Reihe grösser wird als die Summe aller folgenden Glieder.

Dieser Werth von x ist nämlich immer so zu wählen, dass $x < \frac{1}{2q}$, wo q eine Zahl bedeutet, die gleich oder grösser ist als der absolute Werth des grössten Quotienten aus je zwei benachbarten Coefficienten der Reihe.

§. 10.

Der eben ausgesprochene Lehrsatz lässt sich unter gleichen Einschränkungen unmittelbar übertragen auf jede Reihe der Form

$$a_0 x^\alpha + a_1 x^{\alpha+\delta} + a_2 x^{\alpha+2\delta} + \ldots + a_m x^{\alpha+m\delta} + \ldots,$$

in der α und δ ganze oder gebrochene oder irrationale, jedoch immer *positive* Zahlen seyn mögen. Denn da sie einerlei ist mit

$$x^\alpha [a_0 + a_1 x^\delta + a_2 x^{2\delta} + \ldots + a_m x^{m\delta} + \ldots],$$

die hier in der Parenthese enthaltene Reihe aber mit der in §. 9 zusammen fällt, wenn daselbst x mit x^δ vertauscht wird, so braucht, um den Lehrsatz auch hier geltend zu machen, nur $x^\delta < \frac{1}{2q}$ d. i. $x < \left(\frac{1}{2q}\right)^{\frac{1}{\delta}}$ angenommen zu werden.

§. 11.

Um aber zu entscheiden, ob und unter welchen einschränkenden Bedingungen dieser Satz auch dann noch Gültigkeit behält, wenn eine Reihe gegeben ist, in welcher die Potenzen von x zwar ebenfalls steigen, ihre Exponenten aber nicht nach gleichen Differenzen fortschreiten, überlegen wir folgendes. Die Reihe sey

$$ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + dx^\delta + \ldots\ldots,$$

in der Coefficienten und Exponenten beliebig, letztere jedoch durchgängig positiv seyn sollen. Behält nun q seine bisherige Bedeutung, so folgt, weil

$$b < aq,\ c < bq < aq^2,\ d < cq < aq^3 \text{ etc.}$$

$$ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + dx^\delta + \ldots\ldots <$$
$$< ax^\alpha + aqx^\beta + aq^2x^\gamma + aq^3x^\delta + \ldots\ldots$$

Bilden wir nun die geometrische Reihe

$$ax^\alpha + aqx^\beta + aq^2x^{2\beta-\alpha} + aq^3x^{3\beta-2\alpha} + \ldots\ldots,$$

so ist, nach dem Obigen, jedes Glied grösser als die Summe aller folgenden, wenn $x^{\beta-\alpha} < \frac{1}{2q}$, $x < \left(\frac{1}{2q}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}$ welcher Werth $\gtrless 1$, je nachdem $q \lessgtr \frac{1}{2}$. Es ist aber klar, dass auch die nächstvorhergehende Reihe, mithin auch die ursprüngliche $ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \ldots$ diese Eigenschaft haben wird, wenn

$$aqx^\beta + aq^2x^\gamma + aq^3x^\delta + \ldots\ldots <$$
$$< aqx^\beta + aq^2x^{2\beta-\alpha} + aq^3x^{3\beta-2\alpha} + \ldots$$

§. 12.

Um die Bedingungen dieser Ungleichung vollständig zu übersehen, müssen wir unterscheiden, ob die *Differenzen* je zwei benachbarter Exponenten der Reihe $ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \ldots$ *steigen* oder *fallen*.

1) Sie mögen *steigen*, und es sey demnach

$$\beta - \alpha < \gamma - \beta < \delta - \gamma \ldots\ldots,$$

so folgt hieraus

$$\gamma > 2\beta - \alpha,\ \delta > 2\gamma - \beta > 3\beta - 2\alpha, \text{ u. s. f.}$$

Hat also x einen Werth < 1 (und einen solchen wird man selbst dann annehmen dürfen, wenn $\left(\frac{1}{2q}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} > 1$ ist), so findet die Ungleichung am Ende des vorigen §. wirklich statt.

§. 13.

2) Die Differenzen der Exponenten mögen *fallen*, so dass also

$$\beta - \alpha > \gamma - \beta > \delta - \gamma \ldots\ldots,$$

aber

a) die positiven Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ sollen *ganze* Zahlen seyn. In diesem Falle ist die Reihe

nothwendig geschlossen. Denn da die Differenzen ganzer Zahlen selbst wieder ganze Zahlen sind, so müssten dieselben, wenn die Reihe unbegrenzt wäre, irgendwo null oder negativ werden; dann aber würde der Subtrahend grösser als der Minuend, d. h. die Exponenten würden steigen, gegen die Voraussetzung; die Reihe muss also, bevor die Exponentendifferenzen null oder negativ werden, abbrechen. In diesem Falle nun, in welchem

$$\gamma < 2\beta - \alpha,\ \delta < 3\beta - 2\alpha \text{ u. s. f.}$$

würde nicht für jeden Werth von $x < 1$ die obige Ungleichung gültig seyn. Allein dann nehme man die *kleinste Differenz der Exponenten*, die durch $\mu - \lambda$ bezeichnet werden mag, und bilde die geometrische Reihe

$$aqx^\beta + aq^2 x^{\beta+\mu-\lambda} + aq^3 x^{\beta+2\mu-2\lambda} + \ldots\ldots,$$

so ist offenbar $\gamma > \beta + \mu - \lambda$, $\delta > \beta + 2\mu - 2\lambda$, also dann für jedes $x < 1$

$$bx^\beta + cx^\gamma + dx^\delta + \ldots < aqx^\beta + aq^2 x^\gamma + aq^3 x^\delta + \ldots$$
$$< aqx^\beta + aq^2 x^{\beta+\mu-\lambda} + aq^3 x^{\beta+2\mu-2\lambda} + \ldots\ldots$$

Auf diese letztere Reihe ist aber unser Lehrsatz anwendbar, wenn $x < \left(\frac{1}{2q}\right)^{\frac{1}{\mu-\lambda}}$ genommen wird.

§. 14.

b) Die Exponenten α, β, γ, δ, ... seyen zwar positiv, aber echt oder unecht *gebrochen*. In diesem Falle kann die Reihe unendlich seyn, wie z. B. erhellt, wenn man für jene die Werthe

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\ldots$$

annimmt, die immer fort wachsen, deren Differenzen

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \ldots\ldots$$

aber ohne Ende abnehmen. Diese Differenzen können nun entweder, wie im eben gegebenen Beispiel, sich ohne Ende der Null oder auch irgend einer andern

Zahl $= l$ nähern, was z. B. der Fall seyn würde, wenn wir als Reihe der Differenzen die Brüche

$$\frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \text{u. s. f.}$$

wählten, für welche offenbar $l=1$ seyn würde, und woraus, wenn wir $a=1$ setzen, für die Exponenten die Reihe

$$1,\ \frac{5}{2},\ \frac{23}{6},\ \frac{61}{12},\ \frac{377}{60},\ \text{u. s. w.}$$

sich ergäbe. Betrachten wir diesen letztern Fall zuerst, und sey also

α) die Zahl, welcher sich die Differenzen ohne Ende nähern, $=l$, also l *kleiner als jede Differenz* zweier benachbarter Exponenten, so ist dann ohnstreitig für jedes $x<1$

$$bx^\beta + cx^\gamma + dx^\delta + \dots < aqx^\beta + aq^2 x^\gamma + aq^3 x^\delta + \dots$$
$$< aqx^\beta + aq^2 x^{\beta+l} + aq^3 x^{\beta+2\cdot l} + \dots,$$

und auf die letztere Reihe der Lehrsatz anwendbar, sobald $x < \left(\frac{1}{2q}\right)^{\frac{1}{l}}$ genommen wird.

β) Die Differenzen mögen abnehmen *bis zu Null*, so dass $l=0$, woraus sich keine geometrische Reihe wie unter a) bilden lässt, und also der Satz dann im Allgemeinen nicht gültig ist. Wenn aber zugleich q so beschaffen, dass $\left(\frac{1}{2q}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} > 1$, d. i. $q < \frac{1}{2}$, also auch x, obgleich $< \left(\frac{1}{2q}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}$, doch >1 genommen werden kann, so gilt, weil dann

$$x^\gamma < x^{2\beta-\alpha},\ x^\delta < x^{3\beta-2\alpha},\ \text{u. s. f.}$$

die Ungleichung am Ende des §. 11.

Wollte man noch

3) den Fall erwähnen, dass die Unterschiede der Exponenten entweder

a) vom Anfange an bis zu einem gewissen Werthe abnehmen, dann ohne Ende wachsen; oder

b) anfangs bis zu einem gewissen Werthe wachsen, dann ohne Ende abnehmen;

o würde man bei a) mittels der kleinsten Differenz eine geometrische Reihe wie die in §. 13 oder 14 bilden und wie dort schliessen; den Fall b) aber beurheilen, wie den in §. 14, 2. b) behandelten.

§. 15.

Die §§. 11—14 setzten blos positive Exponenten oraus, es bleibt uns demnach noch die Betrachtung er negativen übrig. Nehmen wir an, die gegebene Reihe sey

$$ax^{-\mu} + bx^{-\lambda} + cx^{-\varkappa} + dx^{-\iota} + \ldots\ldots,$$

brigens geschlossen oder unendlich, und, da sie steigen soll, der absoluten Grösse nach

$$\mu > \lambda > \varkappa > \iota \text{ u. s. w.},$$

o endlich auch positive Exponenten folgen können, o lässt sich alles auf den vorhergehenden §. zurückühren. Denn offenbar ist diese Reihe identisch mit olgender

$$x^{-\mu}\ [a + bx^{\mu-\lambda} + cx^{\mu-\varkappa} + dx^{\mu-\iota} + \ldots\ldots],$$

o die Exponenten $\mu-\lambda$, $\mu-\varkappa$, $\mu-\iota$ u. s. w. positive teigende sind, mithin der ausgesprochene Lehrsatz nter den im vorigen §. angegebenen Bedingungen nwendbar ist.

§. 16.

Das Gesammtresultat aus den §§. 10—15 ist nun olgendes:

In jeder nach steigenden Potenzen von x *geordeten Reihe*

$$ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + dx^{\delta} + \ldots,$$

ag sie nun geschlossen oder unendlich seyn, deren xponenten positiv oder negativ, ganz oder gebroen seyn mögen und entweder um immer gleiche der immer grösser werdende oder um ohne Ende bnehmende, nicht aber eine gewisse angebliche renzzahl überschreitende, Differenzen wachsen,

lässt sich ein bestimmter Werth von x *finden,* [fr]*den und* unter *welchem jedes Glied der Reihe grös-ser ist als die Summe aller folgenden. Dieser Werth ist* $< \left(\frac{1}{2q}\right)^{\frac{1}{l}}$, *in welchem Ausdruck* l *die kleinste Differenz der Exponenten oder die Grenze bedeutet, der sie sich, ohne Ende abnehmend, mehr und mehr nähern. Nehmen aber die Differenzen der Exponenten ohne Ende und bis zur Null ab, so findet das Gleiche nur dann statt, wenn der grösste Quotient aus je zwei benachbarten Coefficienten kleiner als* $\frac{1}{2}$ ist.

§. 17.

Wir gehen jetzt zu den Reihen mit *fallenden* Exponenten über. Sind sie

1) *positiv* und die Reihe durch

$$ax^{\mu} + bx^{\lambda} + cx^{\varkappa} + dx^{\iota} + \ldots$$

dargestellt, in der also $\mu > \lambda > \varkappa > \iota$ u. s. w.; so setzen wir $x = \frac{1}{z}$ und erhalten hieraus

$$az^{-\mu} + bz^{-\lambda} + cz^{-\varkappa} + dz^{-\iota} + \ldots,$$

auf welche Reihe, vermöge §. 15, für ein hinlänglich kleines z der Lehrsatz in §. 16 anwendbar ist. Nimmt aber z ab, so nimmt x zu: der Lehrsatz gilt also von einer Reihe mit positiven fallenden Exponenten (die endlich auch in negative übergehen können), wenn man für x einen *hinlänglich grossen* Werth annimmt. Der Fall, in welchem die Exponenten μ, λ, $\varkappa$, ι, u. s. w. positive ganze Zahlen sind, und die Reihe als geschlossenes Polynom erscheint, wird in den nachfolgenden Untersuchungen äusserst häufig vorkommen. Nach §. 13 wird also dann der Lehrsatz gelten, wenn $z < \left(\frac{1}{2q}\right)^{\frac{1}{\eta-\zeta}}$, wo q der grösste Quotient aus zwei benachbarten Coefficienten und $\eta-\zeta$ statt des dortigen $\mu-\lambda$ (da jetzt μ und λ die Anfangsexponenten sind)

die kleinste Differenz der Exponenten bedeutet. *Es wird also in dem Polynom*

$$ax^{\mu} + bx^{\lambda} + cx^{\varkappa} + dx^{\iota} + \ldots.$$

jedes Glied grösser als die Summe aller folgenden, wenn $x > (2q)^{\frac{1}{\eta - \zeta}}$ *genommen wird.*

§. 18.

2) Die Exponenten seyen *negativ*, die Reihe die folgende:

$$ax^{-\mu} + bx^{-\lambda} + cx^{-\varkappa} + dx^{-\iota} + \ldots,$$

so dass also $\mu < \lambda < \varkappa < \iota$ u. s. w.

Setzt man auch hier $x = \frac{1}{z}$, so ergiebt sich

$$az^{\mu} + bz^{\lambda} + cz^{\varkappa} + dz^{\iota} + \ldots,$$

eine Reihe, die unter die Voraussetzung des §. 16 fällt. Macht man also z hinlänglich klein, d. i. x hinlänglich *gross*, so gilt auch jetzt der Lehrsatz. Er gilt also unter denselben Bedingungen für fallende wie für steigende Reihen, wenn x, so wie für diese *hinlänglich klein*, so für jene *hinlänglich gross* angenommen wird. In beiden Fällen aber sind diese Werthe von x *bestimmt angebliche endliche*, nämlich im ersteren solche, die grösser als $(2q)^{\frac{1}{l}}$, im zweiten solche, die kleiner als $\left(\frac{1}{2q}\right)^{\frac{1}{l}}$, in welchen Ausdrücken die Buchstaben die bisher angenommene Bedeutung haben.

§. 19.

Aus den §§. 10—16 ergiebt sich nun unmittelbar die Richtigkeit folgender auf die *steigenden* Reihen sich beziehenden Lehrsätze*):

*) Mit Hülfe der Theorie des Unendlichkleinen findet man sie zum grössern Theile nach bewiesen in Cauchy's *Cours d' Analyse algébrique T. I. p.* 31. Durch die hier gewählte Begründung gewinnt man aber die deutliche Einsicht, dass in allen diesen Theoremen x einen

1) *Jede nach den steigenden Potenzen von geordnete, geschlossene oder unendliche Reihe*

$$ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + dx^\delta + \ldots,$$

(*folglich auch die ihr untergeordnete*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots)$$

in welcher Coefficienten und Exponenten beliebi reelle Werthe haben, die Differenzen der letztern ab nicht bis auf Null abnehmen dürfen, hat, wenn x *h länglich klein, nämlich* $< \left(\frac{1}{2q}\right)^{\frac{1}{l}}$ *genommen wi* (wo q der grösste Quotient aus je zwei benachbart Coefficienten und l die kleinste Differenz aus je zv benachbarten Exponenten oder die Grenze ist, der si diese, ohne Ende abnehmend, nähern) *einen nume schen Werth, dessen Vorzeichen mit dem des A fangsgliedes der Reihe übereinstimmt.*

Denn da in diesen Reihen das Anfangsglied gr ser als die Summe aller nachfolgenden gemacht w den kann, so ist auch selbst in dem ungünstigst Falle, dass die Vorzeichen aller letzteren dem d ersten entgegengesetzt wären, doch der absolute Z lenwerth von diesem grösser als der jener Summ folglich auch das Vorzeichen der ganzen Reihe i dem des Anfangsgliedes übereinstimmend.

2) *Wenn in der steigenden Reihe*

$$ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + dx^\delta + \ldots..$$

der Exponent β *des zweiten Gliedes eine* gera *Zahl ist, so wird für* $x < \left(\frac{1}{2q}\right)^{\frac{1}{l}}$ *der absol Werth der Reihe* $\left\{\begin{matrix}\textit{grösser}\\ \textit{kleiner}\end{matrix}\right\}$ *als der des ersten Gl des, je nachdem der Coefficient* b *des zweiten u das erste Glied* $\left\{\begin{matrix}\textit{einerlei}\\ \textit{entgegengesetzte}\end{matrix}\right\}$ *Zeichen haben.*

---

noch gar wohl angeblichen endlichen Werth hat und hier von d eigentlichen Unendlichkleinen durchaus ohne Nothwendigkeit Rede ist.

Da nämlich, vermöge No. 1, das Zeichen der Summe der Reihe vom 2ten Gliede an allein von diesem letzten abhängt, x^β aber, weil β gerade, immer positiv ist, so ist das Zeichen jener Summe dasselbe als das von b; das übrige erhellt von selbst.

3) *Ist aber in derselben Reihe β eine* ungerade *Zahl, so ist unter übrigens gleichen Voraussetzungen der Werth der Reihe* $\left\{\begin{matrix}\textit{grösser}\\ \textit{kleiner}\end{matrix}\right\}$ *als der des ersten Gliedes, je nachdem die Zeichen von* b *und* x $\left\{\begin{matrix}\textit{gleichartig}\\ \textit{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$, *wenn dieses* positiv; *oder je nachdem die Zeichen von* b *und* x $\left\{\begin{matrix}\textit{ungleichartig}\\ \textit{gleichartig}\end{matrix}\right\}$, *wenn das erste Glied* negativ *ist.* Ein Satz, der eben so leicht erhellt als der erste.

Ist der Exponent des ersten Gliedes $\alpha = 0$, so geht die Reihe in folgende über:

$$a + bx^\beta + cx^\gamma + dx^\delta + \ldots\ldots$$

und es folgt der Satz:

4) *Der Werth* a *der steigenden Reihe*

$$\mathrm{a} + \mathrm{b}\mathrm{x}^\beta + \mathrm{c}\mathrm{x}^\gamma + \mathrm{d}\mathrm{x}^\delta + \ldots,$$

der zu x $=0$ *gehört, ist* $\left\{\begin{matrix}\textit{kleiner}\\ \textit{grösser}\end{matrix}\right\}$ *als jeder zu einem auch noch so kleinen positiven oder negativen* x *gehörige Werth, wenn β gerade und die Zeichen von* a *und* b $\left\{\begin{matrix}\textit{gleichartig}\\ \textit{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ *sind.* Daher heisst dann a im Vergleich mit diesen benachbarten Werthen der Reihe ein $\left\{\begin{matrix}\textit{Kleinstes}\\ \textit{Grösstes}\end{matrix}\right\}$ oder $\left\{\begin{matrix}\textit{Maximum}\\ \textit{Minimum}\end{matrix}\right\}$.

§. 20.

Eben so beziehen sich auf die fallenden Reihen folgende vier Lehrsätze:

5) *Jede nach fallenden Potenzen von* x *geordnete, geschlossene oder unendliche Reihe*

$$\mathrm{a}\mathrm{x}^\mu + \mathrm{b}\mathrm{x}^\lambda + \mathrm{c}\mathrm{x}^\varkappa + \mathrm{d}\mathrm{x}^\iota + \ldots,$$

daher auch die ihr untergeordnete

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} + \ldots,$$

in der Coefficienten und Exponenten beliebige ree Werthe haben mögen, die Differenzen der Exp nenten jedoch nicht bis auf Null abnehmen dürfe hat, wenn x *hinlänglich gross, nämlich* $> (2q)$ *(in der bisherigen Bedeutung der Buchstaben) genon men wird, einen numerischen Werth, dessen Vo zeichen mit dem des ersten Gliedes übereinstimmt*

6) *Wenn in derselben fallenden Reihe der E ponent* λ *des zweiten Gliedes eine* gerade *Zahl, ist für hinlänglich grosse Werthe von* x *der Wer der Reihe* $\left\{\begin{matrix}\text{grösser}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ *als der des ersten Gliedes, nachdem der Coefficient* b *des zweiten Gliedes un das erste Glied* $\left\{\begin{matrix}\text{einerlei}\\ \text{entgegengesetzte}\end{matrix}\right\}$ *Vorzeichen haben.*

7) *Ist aber in derselben fallenden Reihe* λ u gerade, *so ist für hinlänglich grosse Werthe vo* x *der Werth der Reihe* $\left\{\begin{matrix}\text{grösser}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ *als der des erste Gliedes, je nachdem, wenn dieses positiv, die Ze chen von* b *und* x $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ *sind.*

8) *Der Werth* a *der fallenden Reihe mit nega tiven Exponenten*

$$a + bx^{-\lambda} + cx^{-\varkappa} + dx^{-\iota} + \ldots,$$

in der, absolut genommen, $\lambda < \varkappa < \iota$ *u.s. w., de zu* $x = \infty$ *gehört, ist* $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\ \text{grösser}\end{matrix}\right\}$ *als jeder zu einer auch noch so grossen positiven oder negativen gehörige Werth, wenn* λ *gerade und die Zeiche von* a *und* b $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\ \text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ *sind.*

§. 21.

Erheischen die eben aufgestellten Lehrsätze nu einen Werth von x, der hinlänglich klein oder gross aber jedesmal ein bestimmter, angeblicher, endliche ist, so fordern dagegen die folgenden Betrachtungen

en Begriff einer ohne Ende ab- oder zunehmenden, ıner unendlich kleinen oder unendlich grossen Grösse, oder wie wir sie, nach dem Begriffe der Alten, renger erklären wollen, einer Grösse, die beziehlich leiner oder grösser als jede auch noch so kleine oder rosse gegebene gemacht werden kann. Wir wollen rössen der ersteren Art, zur leichtern Unterscheiung, immer durch ω, die der letztern durch Ω bezeichnen, aber sie der Kürze wegen, ohne von ihrer rengen Erklärung abzuweichen, unendlich kleine und ıendlich grosse *nennen.*

§. 22.

Sey nun wieder, wie vorher,

$$ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + dx^\delta + \ldots\ldots$$

ne steigende Reihe, die wir, zur Abkürzung, durch (x) bezeichnen wollen, so kann die Frage aufgestellt erden: welches ist der besondere Werth dieser Reie, wenn x unendlich klein wird?

Die Antwort ergiebt sich auf folgende Weise: ach §. 15 kann, durch ein *hinlänglich kleines* x, ıs wir durch x_1 bezeichnen wollen, bx_1^β grösser als e Summe aller folgenden Glieder gemacht werden, dass also

$$f(x_1) < ax_1^\alpha + 2bx_1^\beta\,;$$

h. wenn auch alle Glieder nach bx_1^β mit diesem nerlei Vorzeichen haben, so geben sie doch zusamen (*arithmetisch* addirt) eine Summe kleiner als x_1^β. Eben deswegen können sie aber auch, wenn sämmtlich entgegengesetzte Vorzeichen mit bx_1^β ıben, zusammengenommen dieses noch nicht verchten, daher immer

$$f(x_1) > ax_1^\alpha\,.$$

iese beiden Ungleichungen gelten streng nur unter r Voraussetzung, dass a und b einerlei Zeichen haen und man den absoluten Zahlwerth betrachtet;

allein haben a und b entgegengesetzte Vorzeichen, so wird nun $f(x_1) > ax_1^\alpha + 2bx_1^\beta$ und $f(x_1) < ax_1^\alpha$ werden, was für unsere Betrachtung ganz dasselbe Resultat giebt. Der Werth $f(x_1)$ ist hier nun zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, deren Unterschied $= 2bx_1^\beta$ ist. Lassen wir aber *von nun an* x unendlich klein werden, d. h. also: nehmen wir an, dass x jeder auch noch so kleine Werth beigelegt werden könne, so wird der Unterschied der einschliessenden Grenzen $2b\omega^\beta$ so *klein als man will.* Wie klein er aber auch sey, so wird doch der Unterschied von $f(\omega)$ und $a\omega^\alpha$ immer *noch kleiner* seyn müssen, denn höchstens könnte $f(\omega)$ *sehr nahe* an der Grenze $a\omega^\alpha + 2b\omega^\beta$ liegen, indess $a\omega^\alpha$ mit der andern immer zusammenfällt. Es ist also

$$f(\omega) - a\omega^\alpha < 2b\omega^\beta .$$

Da nun der Ausdruck zur Rechten so klein gemacht werden kann als man will, der zur Linken aber immer *noch kleiner* seyn soll, so kann diese Forderung nur dadurch uneingeschränkt erfüllt gedacht werden, wenn letzterer gleich Null wird. Demnach ist

$$f(\omega) - a\omega^\alpha = 0; \text{ oder } f(\omega) = a\omega^\alpha .$$

§. 23.

Das Vorstehende lässt noch eine andre Auffassung zu. Es erhellt nämlich, dass um so richtiger als Werth von $f(x)$ das erste Glied ax^α angenommen werden kann, je kleiner x ist. Es ist daher erlaubt zu sagen, *ax^α sey die Grenze* (limes), *der sich* f(x) *um so mehr nähert, je kleiner* x *wird.* Dies soll bezeichnet werden durch

$$\lim f(x) = ax^\alpha , \text{ wo } x = \omega.$$

In dem einzigen Falle, wo $\alpha = 0$, wird $\lim f(x) = a$ eine endliche angebliche Grösse. Für jeden andern Werth wird diese Grenze selbst unendlich klein, kann also der Null beliebig nahe gebracht werden. Nichts

esto weniger wird einer der folgenden §§. lehren, ie wichtig es da, wo man auf *Grenzen von Verältnissen* solcher Functionen kommt, ist, die unendch kleinen Grössen, obgleich einzeln und dem absoten Werthe nach mit Null identisch, doch nach ihr Form und Beziehung unter einander davon sorgiltig zu unterscheiden.

Die Schlüsse, die wir in §. 21 auf das Glied bx^β ngewendet haben, können übrigens eben sowohl auf des der folgenden übergetragen werden. *Unter dem Gesichtspuncte der Annäherung* wird man daher für *hr kleine*, nicht aber unendlich kleine, x mit steiender Richtigkeit schreiben können:

$$f(x) = ax^\alpha$$
$$f(x) = ax^\alpha + bx^\beta$$
$$f(x) = ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma \,.$$

Vird in dem zweiten Ausdruck a, in dem dritten a nd b null, so gelten sie dann auch *streng* für unndlich kleine x, indem dann beziehlich bx^β und cx^γ ls Anfangsglieder von $f(x)$ zu betrachten sind.

§. 24.

Der Inhalt der beiden vorhergehenden §§. lässt ich unmittelbar übertragen auf Reihen mit *negativen* 'otenzen, deren Exponenten, absolut genommen, eine *allende* Reihe bilden, also auf Reihen der Form

$$ax^{-\mu} + bx^{-\lambda} + cx^{-\varkappa} + dx^{-\iota} + \ldots\ldots = \varphi(x)$$

enn stellt man sie, wie im §. 14, unter der Form

$$x^{-\mu}\,[a + bx^{\mu-\lambda} + cx^{\mu-\varkappa} + dx^{\mu-\iota} + \ldots]$$

ar, so ist die Reihe innerhalb der Klammern [ ] eine teigende mit positiven Exponenten, also, da nach . 22 die Grenze derselben a, auch

$$\varphi(\omega) = a\omega^{-\mu} = \frac{x}{\omega^\mu}\,; \quad \text{oder:}$$

$$\lim\ \varphi(x) = ax^{-\mu} = \frac{a}{x^\mu} \text{ für } x = \omega.$$

§. 25.

Hierauf lassen sich die Grenzen der Reihen mi *fallenden positiven* Exponenten der Form

$$ax^{\mu} + bx^{\lambda} + cx^{\varkappa} + dx^{\iota} + \ldots = F(x)$$

zurückführen (in denen also $\mu > \lambda > \varkappa > \iota$ u. s. w.) denn setzen wir $x = \frac{1}{z}$, so wird

$$F\left(\frac{1}{z}\right) = az^{-\mu} + bz^{-\lambda} + cz^{-\varkappa} + dz^{-\iota} + \ldots$$

und, nach §. 23,

$$F\left(\frac{1}{\omega}\right) = a\omega^{-\mu}, \text{ oder deutlicher}$$

$$F\left(\frac{1}{z = \omega}\right) = a(z = \omega)^{-\mu}.$$

Aber wenn $z = \omega$, so wird $x = \frac{1}{z} = \frac{1}{\omega} = \Omega$. Daher ist

$$F(\Omega) = a\Omega^{\mu}$$

oder $$\lim F(x) = ax^{\mu}, \text{ für } x = \Omega.$$

§. 26.

Es bleiben noch die Reihen mit *negativen* Exponenten übrig, die absolut genommen *steigen*, also die Reihen der Form

$$ax^{-\alpha} + bx^{-\beta} + cx^{-\gamma} + dx^{-\delta} + \ldots = \Phi(x).$$

Setzt man auch hier $x = \frac{1}{z}$, so wird

$$\Phi\left(\frac{1}{z}\right) = az^{\alpha} + bz^{\beta} + cz^{\gamma} + dz^{\delta} + \ldots,$$

daher nach §. 21 und 22,

$$\Phi\left(\frac{1}{\omega}\right) = a\omega^{\alpha}, \text{ oder deutlicher}$$

$$\Phi\left(\frac{1}{z = \omega}\right) = a(z = \omega)^{\alpha}.$$

Aber für $z = \omega$ wird $x = \Omega$, daher ist

$$\Phi(\Omega) = a\Omega^{-\alpha}, \text{ oder}$$

$$\lim \Phi(x) = ax^{-\alpha}, \text{ für } x = \Omega.$$

§. 27.

Sey jetzt das *Verhältniss* zweier Reihen mit stei-
;enden positiven Exponenten

$$\frac{a\,x^{\alpha} + b\,x^{\beta} + c\,x^{\gamma} + d\,x^{\delta} + \ldots.}{a'x^{\alpha'} + b'x^{\beta'} + c'x^{\gamma'} + d'x^{\delta'} + \ldots.} = \psi(x)$$

ür $x = \omega$ zu bestimmen, so ist zuerst

$$\psi(x) = \frac{x^{\alpha-\alpha'}\,[a + b\,x^{\beta-\alpha} + c\,x^{\gamma-\alpha} + d\,x^{\delta-\alpha} + \ldots.]}{a' + b'x^{\beta'-\alpha'} + c'x^{\gamma'-\alpha'} + d'x^{\delta'-\alpha'} + \ldots.}$$

Es wird daher nach §. 21 und 22

$$\psi(\omega) = \omega^{\alpha-\alpha'}.\ \frac{a}{a'},\ \text{oder}\ \lim\ \psi(x) = \frac{a x^{\alpha-\alpha'}}{a'},\ \text{für}\ x=\omega.$$

Iieraus erhellt: dass, wenn $\alpha - \alpha' > 0$, die Grenze der
'unction unendlich klein; wenn $\alpha - \alpha' < 0$, also $\omega^{\alpha-\alpha'} =$
$\frac{1}{\omega^{\alpha'-\alpha}} = \Omega^{\alpha'-\alpha}$, dieselbe Grenze unendlich gross; wenn
ıber $\alpha - \alpha' = 0$, also $\omega^{\alpha-\alpha'} = \omega^{\circ} = 1$, dieselbe $= \frac{a}{a'}$,
l. i. eine endliche angebliche Grösse wird. Wir er-
ıalten also hieraus die Thatsachen:

1) dass, wenn auch die Grenzen jeder von zwei
'unctionen einzeln unendlich klein sind, also ihr Zahl-
verth der Null beliebig nahe gebracht werden kann,
loch möglicherweise die *Grenze ihres Verhältnisses*
in endlicher Ausdruck ist;

2) dass dieselbe aber auch nach Umständen un-
ndlich klein oder unendlich gross seyn, d. h. entwe-
ler ohne Ende sich der Null nähern oder über jede
ndliche Grenze hinaus wachsen kann.

Beide Resultate drückt man auch zusammen durch
len Satz aus:

3) Erscheint der besondere Werth des Verhält-
ıissquotienten zweier Functionen unter der Form $\frac{0}{0}$,
o kann dieser Ausdruck im Allgemeinen sowohl Null
ıls das Unendliche, als auch irgend eine endliche
Grösse anzeigen.

§. 28.

Eben so ergiebt sich die Grenze des Verhältnisses zweier Reihen mit fallenden positiven Exponenten

$$\frac{a\,x^{\mu} + b\,x^{\lambda} + c\,x^{\varkappa} + d\,x^{\iota} + \ldots}{a'x^{\mu'} + b'x^{\lambda'} + c'x^{\varkappa'} + d'x^{\iota'} + \ldots} = \Psi(x)$$

für $x = \Omega$. Denn es ist

$$\Psi(x) = x^{\mu-\mu'}\frac{[a + b\,x^{\lambda-\mu} + c\,x^{\varkappa-\mu} + d\,x^{\iota-\mu} + \ldots]}{a' + b'x^{\lambda'-\mu'} + c'x^{\varkappa'-\mu'} + d'x^{\iota'-\mu'} + \ldots}$$

Die eingeklammerte Reihe des Zählers wie der Nenner sind Reihen mit negativen, dem absoluten Werthe nach steigenden, Exponenten, ihre Grenzen werden also nach §. 25 bestimmt, und es ist demnach

$$\Psi(\Omega) = \Omega^{\mu-\mu'}\frac{a}{a'} \text{ oder } \lim \Psi(x) = \frac{a}{a'}x^{\mu-\mu'}, \text{ für } x = \Omega.$$

Dieser Ausdruck wird für $\mu - \mu' > 0$ unendlich gross; für $\mu - \mu' < 0$, $= \frac{a}{a'}\,\frac{1}{\Omega^{\mu'-\mu}} = \frac{a}{a'}\,\omega^{\mu'-\mu}$ unendlich klein; für $\mu - \mu' = 0$, wo $\Omega^{0} = 1$, $= \frac{a}{a'}$ endlich. Hieraus erhellt:

1) dass, wenn auch die Grenzen zweier einzelnen Functionen unendlich gross sind oder der Werth derselben über jede angebliche Grenze hinaus wächst, doch möglicherweise *die Grenze ihres Verhältnisses* ein endlicher Ausdruck ist;

2) dass ebendieselbe auch nach Umständen unendlich klein oder unendlich gross seyn, d. h. sich ohne Ende der Null nähern oder über jede endliche Grösse hinaus wachsen kann;

3) können beide Resultate auch folgenden Ausdruck erhalten: Erscheint der besondere Werth des Verhältnissquotienten zweier Functionen unter der Form $\frac{\infty}{\infty}$, so kann dieses Symbol sowohl Null als das Unendliche als auch irgend eine endliche Grösse anzeigen.

§. 29.

Auf gleiche Weise kann man die Grenzen der Verhältnisse zweier Functionen der in §. 23 und zweier der in §. 25 betrachteten Formen bestimmen, was auf dieselben Ergebnisse führt, als die beiden vorhergehenden §§. geliefert haben. Wir übergehen diese Aufgaben, um noch kürzlich das Product aus zwei Reihen, deren eine nach steigenden positiven, die andre nach negativen, absolut fallenden Exponenten von x fortschreitet, seinem Grenzwerthe nach zu bestimmen. Es ist dies das Product

$$[ax^{\alpha}+bx^{\beta}+cx^{\gamma}+\ldots]\,.\,[a'x^{-\mu}+b'x^{-\lambda}+c'x^{-\varkappa}+\ldots] = \chi(x);$$

welches so viel ist als

$$x^{\alpha-\mu}\,[a+bx^{\beta-\alpha}+cx^{\gamma-\alpha}+\ldots]\,.\,[a'+b'x^{\mu-\lambda}+c'x^{\mu-\varkappa}+\ldots]$$

Die Exponenten der eingeklammerten Reihen sind, nach der Voraussetzung, durchgängig positiv; daher ihre Grenzen für $x=\omega$, nach §. 20 und 21, beziehlich a und a'. Es wird also

$$\chi(\omega)=aa'\,\omega^{\alpha-\mu}\;;\;\text{oder}\;\lim\chi(x)=aa'\,x^{\alpha-\mu}\;,\;\text{für}\;x=\omega.$$

Da nun die Grenzen der beiden gegebenen Reihenfactoren einzeln beziehlich $a\omega^{\alpha}$ und $\frac{a'}{\omega^{\mu}} = a'\,\Omega^{\mu}$ seyn würden, vorstehende Grenze ihres Productes aber, je nachdem $\alpha-\mu > 0$ oder < 0 oder $=0$, unendlich klein oder unendlich gross oder endlich wird, so folgt

1) dass, wenn auch die Grenze der einen zweier Functionen unendlich gross, die der andern unendlich klein wird, doch möglicher Weise *die Grenze ihres Products* endlich ist;

2) aber dieselbe Grenze auch nach Umständen unendlich gross oder unendlich klein werden kann.

3) Erscheint der besondre Werth des Productes zweier Functionen unter der Form $0.\infty$, so kann dieses Symbol sowohl Null als das Unendliche als irgend eine endliche Grösse anzeigen.

§. 30.

Endlich gehört hierher noch der Vollständigke halber das Product

$$[ax^{-\alpha}+bx^{-\beta}+cx^{-\gamma}+\ldots].[a'x^{\mu}+b'x^{\lambda}+c'x^{\varkappa}+\ldots]$$
$$= X(x);$$

wovon für $x = \Omega$ die Grenzen der einzelnen Facto ren beziehlich $a\Omega^{-\alpha} = a\omega^{\alpha}$ und $a'\Omega^{\mu}$ sind. Als Grenz ihres Products findet sich auf dieselbe Weise, wi vorher,

$$X(\Omega) = aa'\Omega^{\mu-\alpha}; \text{ oder lim } X(x) = aa'x^{\mu-\alpha},$$
$$\text{für } x = \Omega.$$

Die hieraus zu ziehenden Resultate sind völlig iden tisch mit denen des nächst vorhergehenden Paragraphen.

Zweiter Abschnitt.

Von den Derivationen polynomischer Functionen.

---

§. 31.

Bedeuten in der polynomischen Function

$$ax^{\alpha}+bx^{\beta}+cx^{\gamma}+dx^{\delta}+\ldots=f(x),$$

leren Exponenten positiv, sonst aber steigend oder allend seyn mögen, und deren Coefficienten beliebige eelle Grössen sind, x und x_1 willkürliche, aber betimmte Werthe der Veränderlichen, so mag die Difèrenz $x-x_1$ zur Abkürzung mit Δx bezeichnet weren, in welchem Symbol jedoch unter Δ nicht ein Factor oder Coefficient, sondern nur (gleich dem f in ler Form $f(x)$) ein charakteristisches Zeichen vertanden wird. Unter dieser Annahme wird ein *beachbarter Werth* von $f(x)$ durch

$$f(x+\Delta x)=a(x+\Delta x)^{\alpha}+b(x+\Delta x)^{\beta}+c(x+\Delta x)^{\gamma}+\ldots$$

usgedrückt werden. Entwickeln wir die Binome des echten Theils weiter und ordnen das Resultat nach len Potenzen von Δx, so erhält man, wenn wir statt $(\Delta x)^{\alpha}$, $(\Delta x)^{\beta}$, u. s. w. abgekürzt Δx^{α}, Δx^{β} u. s. w. chreiben,

$$f(x+\Delta x) = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \ldots$$
$$+ \left\{ a\alpha x^{\alpha-1} + b\beta x^{\beta-1} + c\gamma x^{\gamma-1} + \ldots \right\} \frac{\Delta x}{1}$$
$$+ \left\{ a\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + b\beta(\beta-1)x^{\beta-2} \right.$$
$$\left. + c\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} + \ldots \right\} \frac{\Delta x^2}{1.\ 2}$$
$$+ \left\{ a\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3} + b\beta(\beta-1(\beta-2)x^{\beta} \right.$$
$$\left. + c\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)x^{\gamma-3} + \ldots \right\} \frac{\Delta}{1.2}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \left\{ a\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k} \right.$$
$$\left. + b\beta(\beta-1)\ldots(\beta-k+1)x^{\beta-k} + \ldots \right\} \frac{\Delta x}{1.2.\ldots}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die polynomischen Coefficienten von Δx in diese Entwickelung sind offenbar Functionen von x, di nach einem sehr einfachen Gesetze gebildet sind. De erste derselben, der in $\Delta x^{\circ}=1$ multiplicirte, ist of fenbar $f(x)$ selbst. Der zweite entsteht aus dem er sten, wenn man jedem Gliede desselben einen der zugehörigen Exponenten von x gleichen Factor vor schreibt, diesen Exponenten selbst um eine Einhei vermindert, übrigens die Vorzeichen unverändert läss *Ganz auf dieselbe Weise* entsteht das dritte Polynon aus dem zweiten, das vierte aus dem dritten u. s. f *Die Art*, wie diese Functionen von x eine aus de andern *abgeleitet* werden, bleibt sich also imme *gleich*. Die Operation der Bildung dieser Functione hat in so fern Aehnlichkeit mit der einfacheren de Potenzenbildung, wo der schon gebildeten Potenz um sie auf einen noch höheren Exponenten zu erhe ben, immer der gleiche Factor (die Basis, Wurzel von Neuem zugesetzt wird. Es ist daher sehr passend dass man diese *abgeleiteten Functionen* oder *Deri vationen* auf eine den Potenzen analoge Weise durch

$$f(x), f'(x), f''(x), f'''(x) \ldots f^{(k)}(x) \ldots$$

bezeichnet, so dass also hiernach ist

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1} f'(x) + \frac{\Delta x^2}{1.2} f''(x)$$
$$+ \frac{\Delta x^3}{1.2.3} f'''(x) + \cdots + \frac{\Delta x^k}{1.2 \ldots k} f^{(k)}(x) + \cdots$$

§. 32.

Aus Vorstehendem ergeben sich folgende zwei Erklärungen der Derivationen:

1) *Derivationen* oder abgeleitete Functionen sind die (polynomischen) Coefficienten in derjenigen Entwickelung einer gegebenen (polynomischen) Function — welche im Gegensatz zu ihnen die *ursprüngliche* oder *Stamm*-Function heisst — die erhalten wird, wenn man $x+\Delta x$ für x setzt, die vorkommenden Binomien in Reihen auflöst, das Resultat nach den Potenzen von Δx ordnet und von den polynomischen Ausdrücken, in welche sich diese Potenzen multiplizirt finden, noch einen Bruch als gemeinschaftlichen Factor aussondert, dessen Zähler die Einheit und dessen Nenner das Product der natürlichen Zahlen von 1 bis zum zugehörigen Exponenten von Δx ist.

2) Die nte *Derivation* einer polynomischen Function heisst dasjenige Polynom, das aus jener erhalten wird, wenn man, ohne die Vorzeichen zu ändern, jedem Gliede das Product aller der Factoren vorsetzt, die um 0, 1, 2, ... (n-1) Einheiten kleiner sind, als der Exponent der Veränderlichen, diesen Exponenten selbst aber um n-1 Einheiten vermindert.

Diese zweite Erklärung stellt den Begriff, unabhängig von seinem Ursprunge auf und zeigt zugleich, dass nicht blos das Gesetz der successiven (recurrirenden), sondern auch der independenten Bildung der Derivationen sich leicht übersehen lässt.

§. 33.

Noch eine andre Ansicht von den Derivationen ergiebt sich auf folgendem Wege. Suchen wir, anstatt des Werthes der Function, den sie erhält, wenn x sich in $x+\Delta x$ ändert, den *Zuwachs*, den die ursprüngliche Function $f(x)$ hierdurch erhalten hat, und bezeichnen wir, wenn wir die Function selbst durch y ausdrücken, diesen Zuwachs durch Δy, $f(x+\Delta x)$ aber durch y_1, so ist

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = y_1 - y.$$

Auf dieselbe Weise sey, wenn wir

$$f(x+2\Delta x) = y_2;\ f(x+3\Delta x) = y_3;$$
$$f(x+4\Delta x) = y_4;\ f(x+5\Delta x) = y_5, \text{ u. s. f. setzen,}$$
$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$
$$\Delta y_2 = y_3 - y_2$$
$$\Delta y_3 = y_4 - y_3$$
$$\Delta y_4 = y_5 - y_4, \text{ u. s. w.}$$

So wie hier von den auf einander folgenden Werthen der Function y, so können auch von den vorstehenden *Differenzen* dieser Function wiederum die Unterschiede genommen, und dieselben, indem man sie als *zweite Differenzen* (Differenzen vom zweiten Grade) betrachtet, folgendermaassen bezeichnet werden:

$$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$$
$$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$$
$$\Delta^2 y_2 = \Delta y_4 - \Delta y_3 \text{ u. s. w.}$$

Hieraus entspringen auf gleiche Weise die *dritten*, aus diesen die *vierten*, und so nach und nach alle *höheren* Differenzen, nämlich

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y$$
$$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$$
$$\Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 \text{ u. s. w.}$$
$$\Delta^4 y = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y$$
$$\Delta^4 y_1 = \Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_1 \text{ u. s. w.}$$
$$\Delta^5 y = \Delta^4 y_1 - \Delta^4 y \text{ u. s. w.}$$
$$\Delta^n y = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y \text{ u. s. f.}$$

Aus diesen Begriffen erhellt, dass jede Differenz [e]ines höhern Grades als *erste* Differenz der Differenz [v]om *nächst niedrigeren* Grade betrachtet werden [m]uss, oder dass allgemein

$$\Delta^n y = \Delta\Delta^{n-1} y \text{ und } \Delta^n y = \Delta\Delta^{n-1} y_k,$$

[w]o $k=1, 2, 3, \ldots$

Noch ist zu bemerken, dass, wenn von einer al[g]ebraischen Summe von Functionen

$$af(x) \pm b\varphi(x) \pm c\psi(x) \pm \ldots,$$

[i]n denen a, b, c, von x unabhängige Constanten, [d]ie Differenz zu bilden ist, diese aus derselben al[g]ebraischen Summe der Differenzen der einzelnen [F]unctionen besteht, wobei der constante Factor auch [i]n die Differenz multiplicirt wird. Denn heisst jene [S]umme zur Abkürzung u, so ist

$$\begin{aligned}
\Delta u = af(x+\Delta x) &\pm b\varphi(x+\Delta x) \pm c\psi(x+\Delta x) \pm \ldots \\
- af(x) &\mp b\varphi(x) \mp c\psi(x) \mp \ldots \\
= a\Delta f(x) &\pm b\Delta\varphi(x) \pm c\Delta\psi(x) \pm \ldots
\end{aligned}$$

§. 34.

Mit diesen Hülfsmitteln ergiebt sich nun weiter [f]olgendes. Es ist

$$\begin{aligned}
y_1 &= y + \Delta y; \\
y_2 &= y_1 + \Delta y_1 \\
&= y + \Delta y + \Delta(y + \Delta y), \text{ d. i. nach §. 33 a. E.} \\
&= y + \Delta y + \Delta y + \Delta^2 y \\
&= y + 2\Delta y + \Delta^2 y;
\end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned}
y_3 &= y_2 + \Delta y_2 \\
&= y + 2\Delta y + \Delta^2 y + \Delta(y + 2\Delta y + \Delta^2 y) \\
&= y + 2\Delta y + \Delta^2 y + \Delta y + 2\Delta^2 y + \Delta^3 y \\
&= y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y;
\end{aligned}$$

ebenso

$$\begin{aligned}
y_4 &= y_3 + \Delta y_3 \\
&= y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y \\
&\qquad + \Delta(y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y) \\
&= y + 4\Delta y + 6\Delta^2 y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y; \text{ u. s. f.}
\end{aligned}$$

[w]oraus man nach Analogie schliessen kann

$$y_n = y + \frac{n}{1} \Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 y + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.\ldots k} \Delta^k y + \ldots + \frac{n}{1} \Delta^{n-1} y + \Delta^n y;$$

welche Formel sich ohne Schwierigkeit streng erweise lässt, wenn man vermöge $y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$ zu der Reihe f y_{n+1} übergeht, welche dann in gleicher Form e scheint als die hier für y_n angenommene.

§. 35.

Wenn $y = f(x)$, so ist $y_n = f(x + n\Delta x)$. Setze wir $n\Delta x = h$, so wird h nicht nur dann, wenn n un Δx bestimmte endliche Werthe haben, sondern auc in dem Falle, wo n ohne Ende wächst, indess Δx ohn Ende abnimmt, eine angebliche endliche Grösse bedeu ten können (§. 30). Multipliciren und dividiren wir nu die einzelnen Glieder der Entwickelung von y_n durc diejenigen Potenzen von Δx, deren Exponent de Index von Δ in demselben Gliede gleich ist, so komm

$$f(x+h) = y + \frac{n\Delta x}{1} \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{(n\Delta x)^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1.\ \ 2} \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \frac{(n\Delta x)^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1.\ \ 2.\ \ 3} \frac{\Delta}{\Delta x}$$
$$+ \ldots + \frac{(n\Delta x)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ldots\ldots k} \cdot \frac{\Delta^k y}{\Delta x^k} + \ldots$$

Lassen wir nun n unendlich gross, Δx unendlich kle werden, so ändert sich zwar, wie erwähnt, hierdurc $n\Delta x = h$ nicht, wohl aber reduciren sich dann die Fa toren $1 - \frac{1}{n}$, $1 - \frac{2}{n}$ u. s. w. auf 1; auch nehmen m Δx zugleich Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y, \ldots \Delta^k y$, ohne Ende a d. i. die Quotienten oder Verhältnisse $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}, \frac{\Delta}{\Delta x}$ nähern sich ohne Ende ihren Grenzen (§. 27.)*)

---

*) Es ist nämlich leicht zu übersehen, dass Δy, $\Delta^2 y$ u. s. sich durch Reihen ausdrücken lassen, die nach den Potenzen v Δx geordnet sind, so z. B.

Wenn nun die *Grenzen dieser Quotienten so bezeichnet werden*, dass

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \text{ oder auch } = y'; \lim \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'';$$

$$\lim \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = \frac{d^3 y}{dx^3} = y'''; \ldots \lim \frac{\Delta^k y}{\Delta x^k} = \frac{d^k y}{dx^k} = y^{(k)},$$

so wird

$$f(x+h) = y + \frac{h}{1}\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{h}{1.2\ldots k}\frac{d^ky}{dxk} + \ldots.$$

Für dieselbe Function giebt aber der Ausdruck am Ende des §. 31, wenn das dortige Δx mit h vertauscht wird,

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) +$$
$$+ \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x) + \ldots + \frac{h^k}{1.2\ldots k}f^{(k)}(x) + \ldots$$

Es ist daher

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = y'; f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = y''; f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = y''';$$
$$\ldots f^{(k)}(x) = \frac{d^ky}{dx^k} = y^{(k)}.$$

§. 36.

Diese Resultate lassen sich auch auf folgende übersichtlichere, obwohl nur inductorische, Weise erhalten. Nennen wir f_1, f_2, f_3 u. s. w. die noch unbekannten und von x abhängigen Coefficienten der Potenzen von Δx in der Entwickelung von $f(x+\Delta x)$, so ist nach den gegebenen Erklärungen

---

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{1} f'(x) + \frac{\Delta x^2}{1.2} f''(x) + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots$$

$$\Delta y_1 = \frac{\Delta x}{1} f'(x) + \frac{3\Delta x^2}{1.2} f'(x) + \frac{7\Delta x^3}{1.2.3} f'''(x) + \ldots$$

daraus $\Delta^2 y = \frac{2\Delta x^2}{1.2} f''(x) + \frac{6\Delta x^3}{1.2.3} f''(x) + \ldots$ u. s. f.

$$y = f(x)$$
$$y_1 = f(x) + \Delta x f_1 + \Delta x^2 f_2 + \Delta x^3 f_3 + \Delta x^4 f_4 + \ldots$$
$$y_2 = f(x) + 2\Delta x f_1 + 4\Delta x^2 f_2 + 8\Delta x^3 f_3 + 16\Delta x^4 f_4 + \ldots$$
$$y_3 = f(x) + 3\Delta x f_1 + 9\Delta x^2 f_2 + 27\Delta x^3 f_3 + 81\Delta x^4 f_4 + \ldots$$
$$y_4 = f(x) + 4\Delta x f_1 + 16\Delta x^2 f_2 + 64\Delta x^3 f_3 + 256\Delta x^4 f_4 + \ldots$$

Hieraus ferner

$$\Delta y = \Delta x f_1 + \Delta x^2 f_2 + \Delta x^3 f_3 + \Delta x^4 f_4 + \ldots$$
$$\Delta y_1 = \Delta x f_1 + 3\Delta x^2 f_2 + 7\Delta x^3 f_3 + 15\Delta x^4 f_4 + \ldots$$
$$\Delta y_2 = \Delta x f_1 + 5\Delta x^2 f_2 + 19\Delta x^3 f_3 + 65\Delta x^4 f_4 + \ldots$$
$$\Delta y_3 = \Delta x f_1 + 7\Delta x^2 f_2 + 37\Delta x^3 f_3 + 175\Delta x^4 f_4 + \ldots \text{ et}$$

Sodann

$$\Delta^2 y = 2\Delta x^2 f_2 + 6\Delta x^3 f_3 + 14\Delta x^4 f_4 + \ldots$$
$$\Delta^2 y_1 = 2\Delta x^2 f_2 + 12\Delta x^3 f_3 + 50\Delta x^4 f_4 + \ldots$$
$$\Delta^2 y_2 = 2\Delta x^2 f_2 + 18\Delta x^3 f_3 + 110\Delta x^4 f_4 + \ldots \text{ etc.}$$
$$\Delta^3 y = 6\Delta x^3 f_3 + 36\Delta x^4 f_4 + \ldots$$
$$\Delta^3 y_1 = 6\Delta x^3 f_3 + 60\Delta x^4 f_4 + \ldots \text{ etc.}$$
$$\Delta^4 y = 24\Delta x^4 f_4 + \ldots \text{ etc.}$$

Aus diesen Entwickelungen folgt nun sogleich

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f_1$$
$$\lim \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} = 2f_2$$
$$\lim \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = \frac{d_3 y}{dx^3} = 2.3 f_3$$
$$\lim \frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4} = \frac{d^4 y}{dx^4} = 2.3.4 f_4 \text{ etc.,}$$

womit also auf dem Wege der Induction angezei ist, dass, wenn Δx mit h vertauscht wird,

$$f(x+h) = y + h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3} + \\ + \frac{h^4}{1.2.3.4}\frac{d^4y}{dx^4} + \ldots$$

wie zuvor. Diese Gleichung führt den Namen d *Taylor'schen Lehrsatzes.*

§. 37.

Hiernach kommt nun zu den beiden Erklärung in §. 32 noch die dritte:

Derivationen sind die Grenzen der Verhältniss-
otienten aus den successiven Differenzen der Func-
n durch diejenigen Potenzen der Differenz der Ver-
derlichen, deren Exponent dem Index der Differenz
r Function gleich ist.

Die Symbole dy, dx nennt man *Differentiale*; sie
ıd einzeln als unendlich kleine Grössen zu betrach-
ı. Die Grenzquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ u. s. w. heissen da-
r auch *Differentialquotienten.* Zugleich ergeben
:h auch unmittelbar folgende Ausdrücke:

$$dy=f'(x).dx\,;\ d^2y=f''(x).dx^2\ldots d^ky=f^{(k)}(x).dx^k,$$

lche *Differentialformeln* genannt werden und, nach
23, als Grenzen der Ausdrücke für die Differenzen
y, $\Delta^2 y$ u. s. w. zu betrachten sind. Man kann hier-
ch für die Differentiale und Differentialquotienten, wie
r die Derivationen, höhere und niedere Ordnungen,
e durch die Indices angegeben werden, unter-
heiden. —

Die Operation des Bildens der Differentialquo-
nten oder Derivationen heisst *Differentiiren* oder
eriviren.

§. 38.

Wenn die Exponenten α, β, γ, δ, ... der Func-
n *ganze positive* Zahlen bedeuten, so brechen die
eihen in den §§. 31 und 35 immer ab, sobald die
ınction

$$f(x)=ax^\alpha+bx^\beta+cx^\gamma+dx^\delta+\ldots$$

tweder ein geschlossenes Polynom ist, oder diese
xponenten eine gewisse Zahl nicht übersteigen. Denn
aus §. 32, 2) erhellt, dass die $n$te Derivation von
x), also, nach §. 37,

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^nf(x)}{dx^n}$$

rch

$$a(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}+\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+1)\,x^{\beta-n}+$$
$$\gamma(\gamma-1)\ldots(\gamma-n+1)\,x^{\gamma-n}+\delta(\delta-1)\ldots(\delta-n+1)\,x^{\delta-n}+\ldots$$

ausgedrückt wird, so ist klar, dass, wenn z. B. γ d
grösste Exponent ist und die übrigen ihrer Grö
nach in der Ordnung β, δ, α... folgen, das er
Glied dieses Ausdrucks schon für $n=\alpha+1$, das vie
für den grössern Werth $n=\delta+1$, das zweite erst f
den noch grössern Werth$=\beta+1$ verschwinden wi
für welche Werthe das dritte Glied, welches γ e
hält, zwar noch bleibt, doch aber endlich mit $n=$
constant wird und mit $n=\gamma+1$ verschwindet, so das
da wir γ als den grössten Exponenten der Funct
vorausgesetzt haben, alle Derivationen von $f(x)$, d
ren Index γ übersteigt, null werden.

Wenden wir dies auf die in der Folge am häu
sten vorkommende Function

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m$$

an, so ergiebt sich für sie

$$f^{(m)}(x)=m\ (m-1)\ldots.2.\ 1\ a_0;$$

alle höheren Derivationen verschwinden; es wird
her für *diese* Function $f(x+h)$ durch folgende
schlossene Reihe dargestellt:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$
$$+\frac{h^k}{1.2\ldots k}f^{(k)}(x)+\ldots+\frac{h^m}{1.2\ldots m}f^{(m)}($$

§. 39.

Wird $h=\omega$ unendlich klein, so reducirt sich
Taylor'sche Reihe auf

$$f(x+\omega)=f(x)+\frac{\omega}{1}f'(x).$$

Dies kann jedoch nur so lange als allgemein rich
angesehen werden, als nicht für gewisse Werthe v
x die Stammfunction und einige der ersten abgele
ten verschwinden. In diesen Fällen würde man s
erinnern müssen, dass die vorstehende Gleichung
nächst die Grenze der folgenden

$$f(x+\omega)=f(x)+\frac{\omega}{1}f'(x)+\frac{\omega^2}{1.2}f''(x),$$

iese zunächst die Grenze von

$$f(x+\omega)=f(x)+\frac{\omega}{1}f'(x)+\frac{\omega^2}{1.2}f''(x)+\frac{\omega^3}{1.2.3}f'''(x)$$

st, u. s. w. Wäre also z. B. für $x=\alpha$, $f(x)=0$, so ürde dann

$$f(\alpha+\omega)=\omega f'(\alpha).$$

Väre für $x=\beta$, $f(\beta)=0$ und $f'(\beta)=0$, so müsste ıan

$$f(\beta+\omega)=\frac{\omega^2}{2}f''(\beta)$$

etzen. Machte $x=\gamma$, $f(\gamma)=0$, $f'(\gamma)=0$, $f''(\gamma)=0$, o wäre

$$f(\gamma+\omega)=\frac{\omega^3}{2.3}f'''(\gamma)$$

. s. f. (vgl. §. 23.)

Werthe dieser Art, deren Differenz nur unendlich lein ist, können *nächste* oder *benachbarte* heissen. enkt man sich von einem Werthe $f(x)$ den Ueberang zu einem andern $f(x+h)$ durch alle die unzähgen Zwischenglieder $f(x+\omega)$, $f(x+2\omega)$, $f(x+3\omega)$. s. f., so kann dieser Uebergang *stetig* genannt erden, weil die Unterschiede unmerklich sind.

§. 40.

Ist h nicht unendlich klein, sondern nur eine sehr leine Grösse, so kann man zwar näherungsweise und ıit steigender Richtigkeit setzen:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)$$

$$=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)$$

$$=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x);$$

, s. w.

Man begeht indess offenbar jedesmal einen Fehler, des-sen Grösse einer nähern Bestimmung unterworfen zu werden verdient. Nehmen wir demnach zuerst an dass alle Glieder der Taylor'schen Reihe einerlei Vorzeichen haben, so ist klar, dass, wenn man die Reihe mit dem Gliede $\frac{h^{n-1}}{1\ldots 2(n-1)}f^{(n-1)}(x)$ abbricht, der Rest der Reihe, der sich durch

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n}\Big\{f^{(n)}(x)+\frac{h}{n+1}f^{(n+1)}(x)+$$
$$+\frac{h^2}{(n+1)(n+2)}f^{(n+2)}(x)+\ldots$$

darstellen lässt, grösser ist als das erste Glied dieser Entwickelung, also

$$>\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x);$$

es ist aber auch leicht zu erweisen, dass er

$$<\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+h).$$

Denn da dieser Ausdruck nach dem Taylor'schen Satze entwickelt werden kann, wenn man in der Entwickelung von $f(x+h)$ die Indices durchgängig um n Einheiten vermehrt, so ist

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+h)=\frac{h^n}{1.2\ldots n}\Big\{f^{(n)}(x)+$$
$$+\frac{h}{1}f^{(n+1)}(x)+\frac{h^2}{1.2}f^{(n+2)}(x)+\ldots\ldots$$

ein Ausdruck, in dem jedes Glied offenbar grösser ist, als das entsprechende in dem obigen Reste der Taylor'schen Reihe.

Da nun der Uebergang von $f^{(n)}(x)$ zu $f^{(n)}(x+h)$ *stetig* genommen werden kann (s. vorherg. §.), so muss zwischen den beiden Grenzen ein gewisser Werth liegen, der jenem Reste vollkommen gleich ist. Bezeichnen wir diesen Mittelwerth durch $f^{(n)}(x\ldots x+h)$, so ergiebt sich

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \dots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{1.2\dots n} f^{(n)}(x\dots x+h)$$

eser Werth bleibt hierbei eine Unbekannte, welche her kennen zu lernen für uns ohne besondere Wich- ;keit ist. Dass aber dieser Werth nicht derselbe , wenn man zu einer geringeren, als wenn man zu ıer grössern Anzahl von Anfangsgliedern den Rest cht, ergiebt sich schon daraus, dass, wenn man beim rletzten Gliede $\frac{h^{m-1}}{1.2\dots(m-1)} f^{(m-1)}(x)$ stehen bleibt, so der Rest $\frac{h}{1.\ 2\dots m} f^{(m)}(x)$ ist, die obige ischen x und $x+h$ enthaltene Grösse mit x zusam- enfällt, was nicht der Fall ist, wenn man den Rest r das dritte Glied vom Ende bestimmen will. Als it $x+h$ zusammenfallend würde diese Grösse nur ınn anzusehen seyn, wenn man als Anfangsglied der eihe 0 und die ganze Reihe als den hinzuzufügenden est betrachtet, was natürlich nur ein uneigentlicher usdruck ist. Es wird also diese Zwischengrösse von r Zahl der berücksichtigten Glieder der Reihe oder m Index der Derivation, bei welcher man stehen eibt, abhängen.

§. 41.

Etwas umständlicher wird die Bestimmung des estes der Taylor'schen Reihe, wenn wir *zweitens* an- hmen, dass in demselben positive und negative Zei- ıen vermischt vorkommen. Für diesen Fall ist es thig, folgenden Hülfssatz vorauszuschicken, der ıch sonst von Wichtigkeit ist:

Wenn eine Function $\varphi(z)$ *einer Veränderlichen mit dieser zugleich null wird, und ihre Derivation* (z) *ändert sich von* $z=0$ *bis zu einem beliebigen Werthe* $z=h$ *stetig* — wird also zwischen diesen

Grenzen weder durch einen unendlichen noch unmög-
lichen Werth unterbrochen — *behält auch von* z=
bis z=h *dasselbe Zeichen, so haben zwischen diese*
Grenzen Function und Derivation $\begin{Bmatrix}\textit{einerlei}\\ \textit{entgegengesetzte}\end{Bmatrix}$
Zeichen, je nachdem h $\begin{Bmatrix}\textit{negativ}\\ \textit{positiv}\end{Bmatrix}$ *ist.*

Theilen wir nämlich h in eine beliebige Anzahl
gleicher Theile, so dass also einer derselben =
so ist, wenn wir durch $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$ u. s. f. di
Werthe von $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$, $\varphi''(z)$ u. s. f. für $z=0$ be
zeichnen, und da nach der Voraussetzung $\varphi(0)=($

$$\varphi\left(\frac{h}{\nu}\right)=\varphi\left(0+\frac{h}{\nu}\right)=\frac{h}{\nu}\left\{\varphi'(0)+\frac{h}{2\nu}\varphi''(0)+\ldots\right.$$

$$\varphi\left(\frac{2h}{\nu}\right)=\varphi\left(\frac{h}{\nu}+\frac{h}{\nu}\right)=\varphi\left(\frac{h}{\nu}\right)+\frac{h}{\nu}\left\{\varphi'\left(\frac{h}{\nu}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{h}{2\nu}\varphi''\left(\frac{h}{\nu}\right)+\ldots\right\}$$

woraus

$$\varphi\left(\frac{2h}{\nu}\right)-\varphi\left(\frac{h}{\nu}\right)=\frac{h}{\nu}\left\{\varphi'\left(\frac{h}{\nu}\right)+\frac{h}{2\nu}\varphi''\left(\frac{h}{\nu}\right)+\ldots\right\}$$

ebenso

$$\varphi\left(\frac{3h}{\nu}\right)-\varphi\left(\frac{2h}{\nu}\right)=\frac{h}{\nu}\left\{\varphi'\left(\frac{2h}{\nu}\right)+\frac{h}{2\nu}\varphi''\left(\frac{2h}{\nu}\right)+\ldots\right.$$

u. s. f.; allgemein, wenn k eine positive ganze Zahl $\overline{\overline{<}}$

$$\varphi\left(\frac{kh}{\nu}\right)-\varphi\left(\frac{(k-1)h}{\nu}\right)=\frac{h}{\nu}\left\{\varphi'\left(\frac{(k-1)h}{\nu}\right)+\frac{h}{2\nu}\varphi''\left(\frac{(k-1)h}{\nu}\right)+\ldots\right.$$

Addirt man diese Gleichungen insgesammt, so komm

$$\varphi\left(\frac{kh}{\nu}\right)=\frac{h}{\nu}\left\{\varphi'(0)+\varphi'\left(\frac{h}{\nu}\right)+\varphi'\left(\frac{2h}{\nu}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.+\varphi'\left(\frac{(k-1)h}{\nu}\right)\right.$$
$$+\frac{h^2}{2\nu^2}\left\{\varphi''(0)+\varphi''\left(\frac{h}{\nu}\right)+\varphi''\left(\frac{2h}{\nu}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.+\varphi''\left(\frac{(k-1)h}{\nu}\right)\right.$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Macht man aber $\frac{h}{\nu}$ hinlänglich klein, d. i. ν hinläng

ch gross, so hängt das Zeichen der vorstehenden Entwickelung (nach §. 19, 1) nur von dem ersten Gliede ab. Dies besteht aber aus dem Producte von - in die Summe der ersten Derivationen $\varphi'(z)$ von $z=0$ bis $z=\frac{(k-1)h}{\nu}$, d. i. bis zu jedem beliebigen zwischen 0 und h liegenden Werthe. Da nun, nach der Voraussetzung, $\varphi'(z)$ innerhalb dieser Grenzen sein Zeichen nicht ändern soll, so erhellt, dass der innerhalb derselben Grenzen liegende Werth $\varphi\left(\frac{kh}{\nu}\right)$ der Function $\varphi(z)$ einerlei Zeichen mit den Producten $\frac{h}{\nu}\varphi'(0)$, $\frac{h}{\nu}\varphi'\left(\frac{h}{\nu}\right)$, $\frac{h}{\nu}\varphi'\left(\frac{2h}{\nu}\right)$ u. s. w. hat, d. i. wenn h $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{Bmatrix}$ ist, $\begin{Bmatrix}\text{einerlei}\\\text{entgegengesetzte}\end{Bmatrix}$ Zeichen mit den Derivationen $\varphi'(0)$, $\varphi'\left(\frac{h}{\nu}\right)$, $\varphi'\left(\frac{2h}{\nu}\right)$ u. s. w. selbst, oder, was dasselbe, mit $\varphi'(z)$ zwischen 0 und h.

Hieraus ergiebt sich folgender für den nächsten §. besonders bemerkenswerther

Zusatz: Ist auch $\varphi'(z)$ mit z zugleich null, und $\varphi''(z)$ behält sein Zeichen zwischen 0 und h und ist zwischen denselben Grenzen stetig, so hat für $h \gtrless 0$, $\varphi'(z)$ $\begin{Bmatrix}\text{einerlei}\\\text{entgegengesetzte}\end{Bmatrix}$ Zeichen mit $\varphi''(z)$, also haben für $h \gtrless 0$, $\varphi(z)$ und $\varphi''(z)$ *einerlei* Zeichen. Wird auch $\varphi''(z)$ mit z null, und hat $\varphi'''(z)$ die Eigenschaften, die wir bisher $\varphi'(z)$ und $\varphi''(z)$ beilegten, so hat für $h \gtrless 0$ $\varphi''(z)$ $\begin{Bmatrix}\text{einerlei}\\\text{entgegengesetzte}\end{Bmatrix}$ Zeichen mit $\varphi'''(z)$; also $\varphi(z)$ $\begin{Bmatrix}\text{einerlei}\\\text{entgegengesetzte}\end{Bmatrix}$ Zeichen mit $\varphi'''(z)$. Allgemein: *bildet man die* n *Derivationen* $\varphi'(z), \varphi''(z) \ldots \varphi^{(n)}(z)$, *und die* n—1 *ersten unter denselben, so wie* $\varphi(z)$ *selbst werden mit* z *zugleich null*, $\varphi^{(n)}(z)$ *aber ist stetig und zwischen* $z=0$ *und* $z=h$ *von einerlei Zeichen, so haben, wenn* h positiv, $\varphi^{(n)}(z), \ldots \varphi''(z), \varphi'(z), \varphi(z)$ *einerlei Zeichen; wenn* h negativ, *abwechselnd einer-*

lei und entgegengesetzte Zeichen, so dass, wenn $\left\{\begin{matrix}\textit{gerade}\\ \textit{ungerade}\end{matrix}\right\}$, $\varphi^{(n)}(z)$ *und* $\varphi(z)$ $\left\{\begin{matrix}\textit{einerlei}\\ \textit{entgegengesetzte}\end{matrix}\right\}$ *Zeichen haben.* Die Beständigkeit des Zeichens irgend einer dieser Functionen hängt also ab von der Beständigkeit des Zeichens ihrer nächsten Derivation u. s. f. die Beständigkeit des Zeichens der Stammfunction, wofern alle Derivirten mit z zugleich null werden, und zwischen 0 und h stetig sind, von der Beständigkeit des Zeichens der letzten Derivation, die man bildet.

§. 42.

Gehen wir nun zur Bestimmung des Restes der Taylor'schen Reihe bei gemischten Zeichen über, so ist klar, dass

$$\frac{h^n}{1.2.\dots n}\left\{f^{(n)}(x)+\frac{h}{n+1}f^{(n+1)}(x)+\frac{h^2}{(n+1)(n+2)}f^{(n+2)}(x)+ \right.$$

$$\left. + \dots\right\} > \frac{h^n}{1.2\dots n}r,$$

$$< \frac{h^n}{1.2\dots n}R,$$

wenn r einen kleinern und R einen grössern Werth bedeutet als der Ausdruck innerhalb der Klammern annehmen kann, und für h irgend ein zwischen 0 und h liegender Werth gesetzt wird; oder, was dasselbe,

$$\frac{h^n}{1.2\dots n}f^{(n)}(x)+\frac{h^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}f^{(n+1)}(x)+$$

$$+\frac{h^{n+2}}{1.2\dots(n+2)}f^{(n+2)}(x)+\dots-\frac{h^n}{1.2\dots n}r$$

ist positiv,

$$\frac{h^n}{1.2\dots n}f^{(n)}(x)+\frac{h^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}f^{(n+1)}(x)+$$

$$+\frac{h^{n+2}}{1.2\dots(n+2)}f^{n+2}(x)+\dots-\frac{h^n}{1.2\dots n}R$$

ist negativ. Beide Ausdrücke können als besondere Werthe der allgemeineren Functionen

$$\frac{z^n}{1.2\dots n}f^{(n)}(x)+\frac{z^{n+1}}{1.2\dots(n+1)}f^{(n+1)}(x)+$$

$$+\frac{z^{n+2}}{1.2\dots(n+2)}f^{(n+2)}(x)+\dots-\frac{z^n}{1.2\dots n}r,$$

$$\frac{z^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x) + \frac{z^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(x)$$
$$+ \frac{z^{n+2}}{1.2\ldots(n+2)} f^{(n+2)}(x) + \ldots - \frac{z^n}{1.2\ldots n} R$$

ngesehen werden, deren Veränderliche z von 0 bis stetig wächst, indess x, dem wir irgend einen beimmten Werth beigelegt denken, so wie r und R ls constant zu betrachten sind. Bildet man nun sucessiv die n Derivationen dieser Functionen nach z, ergiebt sich für die letzte derselben beziehlich

$$f^{(n)}(x) + \frac{z}{1} f^{(n+1)}(x) + \frac{z^2}{1.2} f^{(n+2)}(x) + \ldots - r$$

der $\quad f^{(n)}(x+z) - r$

nd $\quad f^{(n)}(x+z) - R.$

ede der vorhergehenden Derivationen ist eine ganze unction, die z als gemeinschaftlichen Factor enthält, lso zugleich mit diesem verschwindet. Nehmen wir aher z positiv, so wird die Stammfunction mit der ten Derivation (vermöge des vorherg. §.) zwischen $=0$ und $z=h$ einerlei Zeichen haben, wenn letztere nerhalb dieser Grenzen ihr Zeichen nicht ändert, . i. wenn

$$f^{(n)}(x+z) - r > 0,$$
$$f^{(n)}(x+z) - R < 0.$$

iese Bedingungen werden erfüllt, wenn r nicht grösr als der kleinste, R nicht kleiner als der grösste ler zwischen $z=0$ und $z=h$ enthaltenen Werthe n $f^{(n)}(x+z)$ genommen wird. Nennen wir die Verthe von z, welche diesen Functionswerthen zugeören sollen, beziehlich q und Q, so kann also

$$r = f^{(n)}(x+q); \quad R = f^{(n)}(x+Q)$$

enommen werden; und es ist demnach der Rest der aylor'schen Reihe

$$> \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x+q) \text{ und } < \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x+Q).$$

t h negativ und n gerade, so bleibt alles wie biser; ist aber n ungerade, so wird

$$f^{(n)}(x+z) - r < 0$$
$$f^{(n)}(x+z) - R > 0;$$

dann aber ist unmittelbar klar, dass der Rest d[e]
Reihe wieder zwischen denselben Grenzen enth[al]ten ist.

Da endlich von $f^{(n)}(x+q)$ zu $f^{(n)}(x+Q)$ e[in]
stetiger Uebergang möglich ist, so wird unter d[en]
zwischen $z=0$ und $z=h$ enthaltenen Werthen d[er]
Function $f^{(n)}(x+z)$ es immer einen geben, der de[m]
Reste der Reihe vollkommen gleich ist, so dass m[an]
also auch für vermischte Zeichen, wie in §. 4[1],
schreiben kann

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{(1.2\ldots n\text{-}1)}f^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x\ldots x+h)$$

§. 43.

Die im §. 35 entwickelte dritte Ansicht von d[en]
Derivationen stellt sie als Grenzen von Quotienten da[r],
deren beide Glieder einzeln null werden, und bezeic[h]net sie daher als die wahren Werthe gebrochner Fun[c]tionen von Δx, welche für den besondern Wer[th]
$\Delta x=0$, unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen, von der no[ch]
vor der Lehre von den Derivationen in §. 27 geha[n]delt wurde. Umgekehrt können die Derivationen —
natürlich nur so fern man sie nicht nach dieser En[t]stehungsweise betrachtet — benutzt werden, um d[ie]
wahren Werthe solcher gebrochenen Functionen, d[ie]
in das Symbol $\frac{0}{0}$ übergehen, zu enthüllen.

Sey $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ eine gebrochene Function, welche f[ür]
$x=a$ in $\frac{f(a)}{\varphi(a)}=\frac{0}{0}$ übergeht. Setzen wir $a+h$ für [a],
so wird

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f(a)+hf'(a)+\frac{1}{2}h^2 f''(a)+\ldots}{\varphi(a)+h\varphi'(a)+\frac{1}{2}h^2\varphi''(a)+\ldots},$$

i. nach der Voraussetzung und wenn man mit h Zäh-
r und Nenner dividirt,

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f'(a)+\frac{1}{2}hf''(a)+\ldots}{\varphi'(a)+\frac{1}{2}h\varphi''(a)+\ldots}$$

acht man jetzt $h=0$, so reducirt sich dieser Aus-
uck auf $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$, so dass also, wenn nicht etwa auch
(a) und $\varphi'(a)$ null werden, der wahre Werth von

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$$

funden ist. Wenn jedoch auch $f'(a) = \varphi'(a) = 0$,
irde der obige Ausdruck für $\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)}$, bevor der be-
ndere Werth von h, nämlich Null, eingeführt würde,
h reduciren auf

$$\frac{\frac{1}{2}hf''(a)+\frac{1}{6}h^2 f'''(a)+\ldots}{\frac{1}{2}h\varphi''(a)+\frac{1}{6}h^2\varphi'''(a)+\ldots},$$

lcher Ausdruck, nachdem durch $\frac{1}{2}h$ Zähler und
nner dividirt und sodann $h=0$ gesetzt ist, sich in

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{f''(a)}{\varphi''(a)}$$

sammenzieht. Wenn sich auch $f''(a)=\varphi''(a)=0$
nde, so würde auf gleichem Wege sich

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{f'''(a)}{\varphi'''(a)}.$$

geben, u. s. f.

Sey z. B. $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a^3-x^3}{a^2-x^2}$, also $\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{0}{0}$,
findet sich $f'(x) = -3x^2$; $\varphi'(x) = -2x$; daher

$$\frac{f(a)}{\varphi(a)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{-3a^2}{-2a} = \frac{3}{2}a.$$

y zweitens $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{b^6-6b^4x^2+6b^3x^3-x^6}{b^4-4b^2x^2+4bx^3-x^4}$, also

$$\frac{f(b)}{\varphi(b)} = \frac{0}{0},$$

so wird

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{-12b^4x+18b^3x^2-6x^5}{-8b^2x+12bx^2-4x^3},$$

welcher Ausdruck aber für $x=b$ wieder $=\frac{0}{0}$ wird

Bilden wir aber

$$\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} = \frac{-12b^4+36b^3x-30x^4}{-8b^2+24bx-12x^2},$$

so giebt dies für $x=b$

$$\frac{f(b)}{\varphi(b)} = \frac{f''(b)}{\varphi''(b)} = -\frac{3}{2}b^2.$$

§. 44.

Da die Untersuchungen, mit welchen wir uns dieser Schrift beschäftigen werden, immer nur d Derivationen von polynomischen Functionen erheische so wird zwar meistentheils die einfache Regel der D rivationenbildung, die sich aus §. 32 ergiebt, hinr chen. In einzelnen Fällen wird es jedoch vortheilha seyn, auch die Derivationen zusammengesetzter Functionen zum Voraus bestimmt zu haben. Einig Entwickelungen dieser Art mögen den gegenwärtig Abschnitt beschliessen.

Sey 1) $y=f(z)$ und $z=\varphi(x)$; also $y=f[\varphi(x)]$ d. i. y die Function einer Veränderlichen, die selb wieder Function einer unabhängigen Veränderlich ist; so fragt es sich, wie die Derivation von y na x, d. i. $\frac{dy}{dx}$ ausgedrückt wird, wenn die Derivation von y nach z und von z nach x, also $\frac{dy}{dz}$ und $\frac{dz}{dx}$ a gegeben angesehen werden. Setzen wir in $\varphi(x)$, $x+$ für x, so ist

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+\frac{h}{1}\varphi'(x)+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(x)+\ldots$$

was auch durch $z+\frac{h}{1}\frac{dz}{dx}+\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2z}{dx^2}+\ldots$

ısgedrückt werden kann. Es ist daher

$$f[\varphi(x+h)] = f[z + h(\frac{dz}{dx} + \ldots)]$$

$$= f(z) + h(\frac{dz}{dx} + \ldots) f'(z) + \ldots.$$

$$= f(z) + h.\frac{dz}{dx} f'(z) + h^2 \{ \ldots . \}$$

ɔ $\{ \ldots . \}$ eine von h abhängige ganze Function ıdeutet; oder noch deutlicher: es ist

$$f[\varphi(x+h)] = f(z) + h \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dz} + h^2 \{ \ldots . \}$$

ɔraus sich ergiebt:

$$\frac{df[\varphi(x)]}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

m also die Derivation einer Function zu finden, ren Veränderliche selbst wieder Function einer veiten unabhängigen Veränderlichen ist, bilde an das Product der Derivationen dieser beiden unctionen, in Beziehung auf die Grössen, von nen sie zunächst abhängen.

Die Symbole dx, dy, dz verhalten sich also hier e wirkliche, angebliche Grössen, die in einan- r dividirt und multiplicirt werden. Es ist dies eine türliche Folge der in §. 35 dargelegten zweiten ısicht von den Derivationen.

Eine unmittelbare Folgerung aus diesem Satze , dass

$$\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1;$$

er dass $\frac{dx}{dy} = 1 : \frac{dy}{dx}$,

ıs auch so ausgedrückt werden kann: *Die Deriva- ınen von zwei Functionen, deren eine durch Um- hrung der andern entsteht, sind Reciproken zu ıander.*

§. 45.

Sey 2) $y = F(x) \pm f(x) \pm \varphi x) \pm \ldots.$
wo F, f, φ beliebige Functionen andeuten, so ist

$$F(x+h) \pm f(x+h) \pm \varphi(x+h) \pm \ldots\ldots =$$
$$= F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \ldots.$$
$$\pm \left\{ f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \ldots. \right\}$$
$$\pm \left\{ \varphi(x) + \frac{h}{1} \varphi'(x) + \ldots \right\}$$
$$\pm \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$= F(x) \pm f(x) \pm \varphi(x) \pm \ldots.$$
$$+ \frac{h}{1} \left\{ F'(x) \pm f'(x) \pm \varphi'(x) \pm \ldots. \right\}$$
$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

also (§. 32, 1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d[F(x) \pm f(x) \pm \varphi(x) \pm \ldots]}{dx} = F'(x) \pm f'(x) \pm \varphi'(x) \pm \ldots$$
$$= \frac{dF(x)}{dx} \pm \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{d\varphi(x)}{dx} \pm \ldots;$$

d. i. *die Derivation einer algebraischen Summe von Functionen ist gleich der mit denselben Zeichen zu nehmenden Summe der Derivationen jeder einzelnen Function.*

Derselbe Satz folgt auch aus §. 33 a. E. Denn aus

$$\Delta y = \Delta F(x) \pm \Delta f(x) \pm \Delta\varphi(x) \pm \ldots.$$

folgt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \pm \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \pm \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} \pm \ldots,$$

woraus, wenn man die Grenze nimmt, das vorige Resultat sich wieder ergiebt.

§. 46.

Sey 3) $y = f(x).\ \varphi(x)$,
so ist $f(x+h).\ \varphi(x+h) = f(x).\ \varphi(x) +$

$$+ \frac{h}{1} \left\{ f'(x).\ \varphi(x) + f(x).\ \varphi'(x) \right\} + \ldots..$$

lglich

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).\varphi(x) + f(x).\varphi'(x)$$

$$= \varphi(x).\ \frac{df(x)}{dx} + f(x)\ \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

etzen wir statt des Productes aus zwei Functionen on x ein solches aus dreien P, Q, R, so ist

$$\frac{d(PQR)}{dx} = \frac{d[(PQ)R]}{dx}$$

ach der eben gefundenen Formel

$$= PQ\ \frac{dR}{dx} + R\ \frac{d(PQ)}{dx}.$$

ber nach eben derselben ist

$$\frac{d(PQ)}{dx} = P\ \frac{dQ}{dx} + Q\ \frac{dP}{dx};$$

aher, nach Substitution in dem vorhergehenden Ausuck,

$$\frac{d(PQR)}{dx} = PQ\ \frac{dR}{dx} + PR\ \frac{dQ}{dx} + QR\ \frac{dP}{dx}.$$

s ist leicht, auf diese Weise auch die Derivation eies Products aus vier und mehreren Functionen von x zuleiten, und ergiebt sich hieraus die gemeinsame egel:

Die Derivation aus einem Producte von m *unctionen ist gleich der Summe der Producte aus n Derivationen der* m *einzeln genommenen Funcnen in die übrigen* m—1 *Functionen selbst.*

§. 47.

Sey 4) $y = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$,

so $y.\varphi(x) = f(x)$, so ist (vorherg. §.)

$$\frac{df(x)}{dx} = y\frac{d\varphi(x)}{dx} + \varphi(x)\ \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{f(x)}{\varphi(x)}\ \frac{d\varphi(x)}{dx} + \varphi(x)\frac{dy}{dx}.$$

Löst man diese Gleichung für $\frac{dy}{dx}$ als unbekannt
Grösse auf, so findet sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)\frac{df(x)}{dx} - f(x)\frac{d\varphi(x)}{dx}}{[\varphi(x)]^2};$$

d. h.: *die Derivation aus dem Quotienten zwei Functionen ist gleich dem Unterschiede des Pr ducts aus dem Divisor in die Derivation des Div dends und des Products aus dem Dividend in d Derivation des Divisors, dividirt durch das Qu drat des Divisors.*

Wäre noch 5) $y = [f(x)]^m$
gegeben, so folgt aus §. 44, wenn wir das dortig $z = f(x)$ setzen, so dass also daselbst $y = z^m$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = mz^{m-1}\frac{dz}{dx}$$

$$= m\,[f(x)]^{m-1} f'(x).$$

Dritter Abschnitt.

Vom Gebrauch der Derivationen in der Theorie der Curven.

---

§. 48.

Bedeute, wie §. 3, $x = OP$ (Fig. 2) die Abscisse, $= PM$ die zugehörige Ordinate der durch die Glei-ıung $y = f(x)$ gegebenen Curve CD, so dass durch und y zwar ein beliebiger, aber doch bestimmter ınkt M angegeben seyn soll; wachse ferner die bscisse um das Stück $h = PP'$, und sey der Zu-ıchs, den hierdurch y bekommt, $= k = QM'$, so ist

$$y + k = f(x + h)$$
$$= f(x) + hf'(x) + \tfrac{1}{2}h^2 f''(x) + \ldots$$

so $\quad k = \quad hf'(x) + \tfrac{1}{2}h^2 f''(x) + \ldots$

Je kleiner h, um so mehr nähert sich diese Glei-ung der Grenze

$$k = hf'(x),$$

ꞏlche jedoch in aller Strenge nur für unendlich kleine ʹerthe von h und k gilt, was auch durch unsere an-nommene Bezeichnungsart, indem wir $h = \omega$, $k = \omega'$ tzen, in der Formel

$$\omega' = \omega f'(x)$$

sonders dargestellt werden kann. Diese letztere eichung ist dann als untergeordneter Fall der nächst rhergehenden anzusehen, in welcher h als unabhän-

gige Veränderliche, k als Function von h, x abe
(wegen des bestimmten Werthes, der ihm beigeleg
wurde) als constant zu betrachten ist. Offenbar abe
stellt dann die Gleichung $k = hf'(x)$ eine durch de
Punct M gehende Gerade dar, deren Lage durch di
rechtwinkligen Coordinaten h, k gegeben ist, von de
nen die erste auf einer durch den Punct M zu de
Axe der x parallelen Geraden MX' liegt, und dere
Anfang der Punct M selbst ist; die endlich mit de
Parallele MX', oder was dasselbe, mit der x-Axe O
selbst einen Winkel ψ macht, dessen Tangente gleic
dem constanten Coefficienten der Abscisse h, d. i. fü
den
$$\tang \psi = f'(x)$$
ist *). Da nun die Gleichung der Curve $y+k=f(x+h)$
wenn h ohne Ende abnimmt, sich auf die Gleichun
der Geraden
$$y+k=f(x)+hf'(x)$$
reducirt, in der h als Abscisse, $y+k$ als Ordinat
zu betrachten ist, so können wir dies geometrisch au
drücken: *die Curve fällt in dem Puncte* M *mit ei*
ner Geraden zusammen, die durch diesen Punc
geht, und von der die Tangente ihrer Neigung ge
gen die Abscissenaxe demjenigen Werthe der erste
Derivation gleich ist, den diese erhält, wenn in ih
x *die Abscisse von* M *ausdrückt.*

§. 49.

Es lässt sich zeigen, dass jede andre durch M
gehende, von der eben erwähnten in ihrer Richtun
auch noch so wenig verschiedene, Gerade die Curv
nothwendig schneidet. Dies wird geschehen, wen
sich von ihr nachweisen lässt, dass ausser M noc
ein Punct auf der hohlen, ein anderer auf der erha

*) Setzen wir $h=x_1-x$ und $k=y_1-y$, so nimmt obig
Gleichung die Form $y_1-y=(x_1-x)f'(x)$ an, in der man un
mittelbar die einer durch den Punct (x, y) gehenden unter eine
Winkel, dessen tang $=f'(x)$, geneigten Geraden erkennt.

enen Seite der Curve liegt. Sey die Neigung einer
olchen Linie gegen die Abscissenaxe $=\psi'$, so wird,
enn wir die Gleichung der Curve durch

$$y+k=f(x)+hf'(x)+\tfrac{1}{2}h^2f''(x)+\ldots,$$

ie der mit ihr zusammenfallenden Geraden durch

$$y+k'=f(x)+hf'(x)$$

usdrücken, die durch M gehende unter ψ' geneigte
erade durch die Gleichung

$$y+k''=f(x)+h\,\mathrm{tang}\,\psi'$$

argestellt werden, in welchen beiden letztern Glei-
hungen also $y+k'$ und $y+k''$ die veränderlichen
rdinaten sind. Vergleichen wir die beiden ersten
ieser Ausdrücke mit einander, so ist klar, dass

$$y+k \lesseqgtr y+k', \text{ d. i. } \tfrac{1}{2}h^2f''(x)+\ldots \begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix},$$

nachdem $f''(x)$ $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$.

Denn da für ein hinlänglich kleines h in der er-
en Gleichung jedes Glied grösser wird als die Sum-
e aller folgenden, so gilt dies auch von $\frac{1}{2}h^2f''(x)$,
id zwar, h möge positiv oder negativ seyn; jeder M
orhergehende oder folgende Punct der mit der Curve
M zusammenfallenden Geraden, mithin diese Ge-
ide selbst, liegt also, je nachdem $f''(x)$ negativ oder
ositiv, über oder unter der Curve, also auf einerlei
eite derselben. Den ersten Fall stellt die 3te, den
ndern die 4te Figur dar, wo CD die Curve, Tt die
it ihr zusammenfallende Gerade ist; wir haben da-
ei $y=f(x)$ als positiv angenommen.

Sey nun zuvörderst $f''(x)$ *negativ*, so dass also
e Tt, wie in Fig. 3, ganz über der Curve liegt, so
äre es denkbar, dass eine andre durch M gelegte
erade Ss (Fig. 5.), die mit der x-Axe einen solchen
Vinkel ψ' macht, dass tang ψ' sehr wenig kleiner als
(x), ebenfalls noch ganz über der Curve läge. Es
sst sich nun allerdings *zuerst* zeigen, dass diese
erade, deren Gleichung also

$$y+k''=f(x)+h\,\mathrm{tang}\,\psi',$$

und für welche $\tang\psi' < f'(x)$, Puncte über der Curv
hat; denn es ist

$y+k'' > y+k$, wenn $h\tang\psi' > hf'(x)+\frac{1}{2}h^2 f''(x)+..$

d. i., h positiv angenommen, wenn

$$\tang\psi' > f'(x)+\tfrac{1}{2}hf''(x)+\ldots$$

Nimmt man nun h so klein, dass $\frac{1}{2}h^2 f''(x)$ grösse wird als die Summe aller folgenden Glieder, so wird da hierbei h doch immer noch einen endlichen angebli chen Werth hat, die Differenz $\tang\psi' - f'(x)$ so klein ge nommen werden, dass ihr absoluter Werth kleiner als de der Summe $\frac{1}{2}hf''(x)+\ldots$ (wozu es nur bedarf, dass er klei ner gemacht werde als der absolute Werth von $2.\frac{1}{2}hf''(x)$ dann aber ist für ein negatives $f''(x)$ und positives

$$\tang\psi' - f'(x) - \tfrac{1}{2}hf''(x) - \ldots \textit{ positiv} \text{ oder } > 0,$$

d. h. es gilt die obige Ungleichung wirklich. Allein unsre Gerade Ss hat auch Puncte unter der Curve Denn wie klein auch die Differenz $\tang\psi' - f'(x)$ sey so kann man doch durch fortgesetzte Verminderun von h jederzeit machen, dass der absolute Werth vo $\frac{1}{2}hf''(x)+\ldots$ kleiner wird als derjenige der vorerwähn ten Differenz, was um so mehr gilt, je kleiner h un also auch für unendlich kleine h gültig ist*). Fü diese Werthe von h wird demnach $y+k'' < y+k$, d h. die Ss liegt unter der Curve. Da also die Ss au einer und derselben Seite von M Puncte unter un über (innerhalb und ausserhalb) der Curve hat, s schneidet sie diese nothwendig. Dies erläutert di Fig. 5, wo m ein Punct der Ss innerhalb, s ein an derer ausserhalb der Curve ist.

§. 50.

Sey *zweitens* $f''(x)$ positiv und liege demnach di Tt ganz unter der Curve, so könnte vielleicht ein

---

*) Diese Stelle scheint sehr geeignet, die Nothwendigkeit de Unterscheidung einer *hinlänglich* kleinen von einer *unendlich* kleine Grösse fühlbar zu machen, und zu zeigen, dass sie nicht etwa ein leere Spitzfindigkeit ist.

rch M gezogene Gerade Ss (Fig. 6), die mit der Axe den Winkel ψ' macht, ebenfalls ganz unter der rve liegen, wenn tangψ' sehr wenig grösser als $f'(x)$ nommen würde. Dann aber lässt sich zeigen, dass Werthe von h giebt, für welche

$$y+k'' < y+k,$$

is davon abhängt, dass, wenn wir h positiv nehmen,

$$\text{tang}\,\psi' < f'(x) + \tfrac{1}{2}hf''(x) + \ldots$$

er tang$\psi' - f'(x) - \frac{1}{2}hf''(x) - \ldots$ negativ ist. Dies det aber für hinlänglich kleine h und wenn, wie rausgesetzt wurde, tang$\psi' - f'(x)$ positiv aber kleiner s $\frac{1}{2}hf''(x) + \ldots$, wirklich statt; und die Ss hat demch Puncte unterhalb der Curve. Allein durch fortihrende Verminderung von h kann auch umgekehrt rselbe Ausdruck positiv, d. i.

$$y+k'' > y+k$$

macht werden, so dass sich hieraus ergiebt, dass grösserer Nähe von M die Ss auch Puncte über r Curve hat und daher letztere schneidet, möge sie ch noch so wenig von der Tt abweichen.

In beiden Fällen liegt daher die Tt *allein ganz* f der erhabenen Seite oder ausserhalb der Curve, d keine andere Gerade lässt sich zwischen beiden rch M ziehen, ohne die Curve zu schneiden. *Die it der Curve in* M *zusammenfallende ganz ausserlb derselben liegende Gerade* Tt *heisst daher die erührungslinie, Berührende* (*Tangente*) *der Curve* M, *jede andre durch* M *gehende, wie* Ss, *eine hneidende* (*Secante*).

Es drückt daher die erste Derivation einer unction (*nach* §. 48) *die trigonometrische Tannte der Neigung der Berührenden der durch die unction selbst gegebenen Curve gegen die Abscisnaxe aus.* Sie ist in allen bisher betrachteten Lan der Curve positiv. Ueberall wächst hier nämlich t der Abscisse zugleich die Ordinate. Nimmt sie er ab, wenn die Abscisse wächst, so wird $f'(x)$

negativ, wie es die Figuren 7 und 8 zeigen. Für n
gative Ordinaten kehrt sich Alles um, wie aus d
Figuren 9 bis 12 näher zu ersehen ist. Jede die
Fälle specialisirende analytische Regel wird durch d
Betrachtung des folgenden §. überflüssig gemacht.

§. 51.

Man erinnere sich nämlich, dass auch

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Ist daher in Fig. 13 und 14, $PP' = \Delta x$, und demnac
wenn MQ parallel zu OX, $M'Q = \Delta y$, so ist, wen
der Winkel der Schneidenden mit der x-Axe $M'MQ = \psi$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tang} \psi'.$$

Je kleiner aber Δx und damit Δy, um desto näher rüc
der Punct M' an M, bis endlich bei dieser drehende
Bewegung der Schneidenden um M, bevor M' auf di
andre Seite von M hinüberrückt (wo Δx negativ we
den würde), beide Durchschnitte zusammenfallen, un
die Schneidende Ss in die Berührende Tt übergeh
Offenbar wird bei dieser unendlichen Verminderun
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ verändert. Der Wi
kel ψ' aber wird dann der Winkel der Berührende
mit der x-Axe, der wie zuvor ψ heissen mag. Fü
diese Grenze ist also

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \operatorname{tang} \psi.$$

Nach dieser Darstellung erscheint also *die Be
rührende als eine Schneidende, deren beide Durch
schnittspuncte in Einen zusammengefallen sind.*

Die Zeichen von Δx und Δy, die, je nachde
diese Differenzen den absoluten Werth der Coordina
ten x und y vermehren oder vermindern, mit dene
dieser letztern gleichartig oder entgegengesetzt sind
bestimmen nun ganz von selbst das Zeichen vo

$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \text{tang}\psi$, und geben damit zu erkennen, ob ψ spitz oder stumpf wird. Es ist leicht, dies an den Figuren 5 bis 12 zu erläutern; natürlich muss der Winkel ψ immer auf eine und dieselbe Art genommen werden, so dass z. B. in Fig. 9 nicht MTX, sondern sein spitzer Nebenwinkel, der durch Verlängerung von MT erhalten wird, dagegen in Fig. 11 nicht der spitze Winkel MTX, sondern sein stumpfer, ebenfalls durch Verlängerung von MT zu erhaltender Nebenwinkel ψ darstellt*).

§. 52.

Von dieser geometrischen Bedeutung des Differentialquotienten oder der Derivation hängt die Bestimmung einiger bei den Curven vorkommenden Geraden ab, die wir in der Folge nicht werden entbehren können. Heisst nämlich das zwischen dem gegebenen Punct M und dem Einschnitt der Berührenden in M in der x-Axe enthaltene Stück MT die *Tangente* schlechthin; ferner der Abschnitt auf der Abscissenaxe zwischen diesem Einschnitt der Berührenden und dem Fusspunct der Ordinate, TP, die *Subtangente*; sodann das Stück der im Berührungspunct M auf der Tangente errichteten Senkrechten, das zwischen M und der Abscissenaxe liegt, MN, die *Normale*; und endlich der Abschnitt auf der Abscissenaxe zwischen dem Einschnitt der Normale und dem Fusspunct der Ordinate, PN, die *Subnormale*, so ergeben sich leicht folgende vier Formeln:

---

*) Wir bemerken bei dieser Gelegenheit, dass nach der gegebenen Auslegung der ersten Derivation der in §. 40 analytisch erwiesene Hülfssatz sich nun fast von selbst versteht. Denn soll $\varphi'(z)$ von $z=0$ bis $z=+h$ einerlei Zeichen behalten, so wird, wenn dieses $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist, die Curve sogleich für $z=0$ auf die $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\\text{untere}\end{matrix}\right\}$ Seite der Abscissenaxe treten und daselbst zwischen den gegebenen Grenzen bleiben.

$$\text{Subtang} = PT = y\,\frac{dx}{dy} = \frac{f(x)}{f'(x)};$$

$$\text{Tang} = MT = y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$
$$= f(x).\sqrt{1+\left(\frac{1}{f'(x)}\right)^2}$$

$$\text{Subnorm} = PN = y\,\frac{dy}{dx} = f(x).\,f'(x);$$

$$\text{Norm} = MN = y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$
$$= f(x).\sqrt{1+[f'(x)]^2}$$

In dem rechtwinkligen Dreieck MPT ist nämlic[h] $\operatorname{tg} T = \frac{dy}{dx} = f'(x)$; daher $\operatorname{tg} PMT = \operatorname{tg}(90-T) =$ $\cot T = \frac{1}{\operatorname{tg}T} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$ (vgl. §. 44 a. E.) woraus nun sogleich, da $MP = y'$ die erste, und mi[t] Zuziehung des pythagorischen Satzes die zweite For[-]mel folgt. Eben so ist im rechtwinkligen Dreiec[k] PMN, $\operatorname{tg} PMN = \operatorname{tg} T = \frac{dy}{dx} = f'(x)$; hieraus ergieb[t] sich die dritte und aus dieser ebenfalls durch de[n] pythagorischen Satz die vierte Formel.

§. 53.

Eine aufmerksame Vergleichung der in den §§. 49 und 50 vorkommenden analytischen Voraussetzun[-]gen mit den ihnen entsprechenden Figuren zeigt, das[s] dort bei einem positiven Werthe der Function ode[r] Ordinate einem negativen Werthe der zweiten Deriva[-]tion eine hohle, einem positiven Werthe ebenderselbe[n] eine erhabene Lage der Curve gegen die Abscissenax[e] entspricht. Wir wollen jetzt den Grund und die Nothwen[-]digkeit dieses Zusammenhangs nachweisen. Er beruh[t] auf der geometrischen Bedeutung der zweiten Deriva[-]tion, die wir jetzt erläutern wollen. Es ist nach §. 3[5]

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \lim \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \lim \frac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^2};$$

wo $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$; und
$\Delta y_1 = f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x)$ war.

Sey daher in Fig. 15 und 16 $PP' = P'P'' = \varDelta x$, $'M = y$, so wird, wenn MQ und $M'Q'$ parallel zur -Axe, und $M'P'$ und $M''P''$ parallel zu MP, $M'Q = \varDelta y$, $''Q' = \varDelta y_1$ seyn. Wird daher durch M und M' e Gerade sS gezogen, die bei S in die, wenn es ithig, verlängerte $P''M''$ einschneidet, so folgt aus r Congruenz der Dreiecke $M'SQ'$ und $MM'Q$, dass $Q' = M'Q = \varDelta y$. Hat nun die Curve in der Nähe n M eine $\left\{\begin{matrix}\text{hohle}\\ \text{erhabene}\end{matrix}\right\}$ Lage gegen die x-Axe, so uss, wie es die Figuren zeigen, der Punct S nothndig $\left\{\begin{matrix}\text{über}\\ \text{unter}\end{matrix}\right\}$ ihr liegen: denn betrachten wir statt r Curve CD das eingeschriebene Polygon, von dem $'M'M''\ldots$ ein Stück, welches sich der Curve um so irker nähert, je kleiner $\varDelta x$, so ist klar, dass, wenn gebrochene Linie $MM'M''\ldots$ der Abscissenaxe ihre $\left\{\begin{matrix}\text{hohle}\\ \text{habene}\end{matrix}\right\}$ Seite zukehren soll, dieselbe $\left\{\begin{matrix}\text{oberhalb}\\ \text{unterhalb}\end{matrix}\right\}$ M'' $M''P''$ oder ihre Verlängerung schneiden muss. isselbe findet nun statt in Beziehung auf die Grenze eser gebrochnen Linie, die Curve, und es ist daher, klein man auch $\varDelta x$ nehmen möge, immer, wenn Curve der x-Axe die $\left\{\begin{matrix}\text{hohle}\\ \text{erhabene}\end{matrix}\right\}$ Seite zukehrt, $' \gtrless \varDelta y_1$, d. i.

$\varDelta y_1 - \varDelta y$, also auch $\frac{\varDelta y_1 - \varDelta y}{\varDelta x^2} = \frac{\varDelta^2 y}{\varDelta x^2}$, $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$;

thin *wendet*, da dies auch für beliebig kleine $\varDelta x$ t, *die Curve ihre* $\left\{\begin{matrix}\textit{hohle}\\ \textit{erhabene}\end{matrix}\right\}$ *Seite der Abscisaxe zu, je nachdem* $\frac{d^2 y}{dx^2}$ *oder* $f''(x)$ $\left\{\begin{matrix}\textit{negativ}\\ \textit{positiv}\end{matrix}\right\}$.

Dieser Regel liegt jedoch die Voraussetzung ei- positiven $y = f(x)$ zum Grunde; sie ist umzukeh- , wenn y negativ. Werde nämlich die Abscissen- sich selbst parallel so verlegt, dass der Punct der rve, den wir betrachten, auf der negativen Seite der ien Axe liegt, und nennen wir die neue Ordinate des ictes ihrer absoluten Länge nach y', den Abstand neuen Abscissenaxe von der alten δ, so ist

$y' = \delta - y$; folgl. $\Delta y' = -\Delta y$; $\frac{dy'}{dx} = -\frac{dy}{dx}$; $\frac{d^2y'}{dx^2} = -\frac{d^2y}{dx^2}$ u.
Es ändert also dann auch die zweite Derivation ihr Zi-
chen. Beide Fälle fasst man bequem in folgende geme-
same Regel zusammen: *die Curve kehrt der Absciss-
axe ihre* $\left\{\begin{matrix}\textit{hohle}\\ \textit{erhabene}\end{matrix}\right\}$ *Seite zu, je nachdem* f(x) *und* f″
$\left\{\begin{matrix}\textit{entgegengesetzte}\\ \textit{gleichartige}\end{matrix}\right\}$ *Zeichen haben; oder auch, was d-
selbe, je nachdem das Product* f(x). f″(x) *oder au-
der Quotient* $\frac{f(x)}{f''(x)}$ $\left\{\begin{matrix}\textit{negativ}\\ \textit{positiv}\end{matrix}\right\}$ *ist.*

Die Bedeutung von $\frac{d^2y}{dx^2}$ in der Figur ist dah-
$\lim \mp \frac{M''S}{PP'^2}$. Die zweite Derivation ist also weder w-
die Function, welche die Ordinate darstellt, eine L-
nie, noch wie die erste Derivation, welche eine t-
gonometrische Tangente ausdrückt, eine abstra-
Zahl, sondern eine Grösse der ersten negativen D-
mension, d. i. eine solche, die in eine Linie multip-
cirt eine abstracte Zahl giebt. Dies folgt auch sch-
aus dem Taylor'schen Lehrsatze. Denn bedeuten
der Gleichung

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \tfrac{1}{2}h^2 f''(x) + \dots$$

$f(x)$ und h Linien, so muss wegen der Homogen-
tät der Glieder $f''(x)$ die erste negative Dimensi-
haben.

§. 54.

Es hat keine Schwierigkeit, auf dieselbe Wei-
die Bedeutung der dritten und höhern Derivationen
erläutern, und es wird hinreichen, nur noch für d-
dritte dies anzudeuten. Nach §. 35 war

$$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \lim \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = \lim \frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y}{\Delta x^3};$$

$$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y; \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1;$$

endlich $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;

$$\Delta y_1 = f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x);$$

$$\Delta y_2 = f(x + 3\Delta x) - f(x + 2\Delta x).$$

Wenn daher in Fig. 15 und 16 auch $P''P''' = \Delta x$, "Q" parallel zur x-Axe und $M'''P'''$ parallel zu MP, "Q"' $= \Delta y_2$; so ist, wenn $M'M''$ verlängert bei S' die $M'''P'''$ oder ihre Verlängerung einschneidet, $S'M''' = \Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1$. Es war aber auch $SM'' = \Delta^2 y$; daher $\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y = \mp S'M''' \pm SM''$, lche Differenz für beide Lagen der Curven positiv d negativ seyn kann und daher nicht, wie die beiden ten Derivationen, auf Gestalt und Lage der Curve ıfluss ausübt. Hiernach ist also

$$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} = \lim \frac{\mp S'M''' \pm SM''}{PP'^3}$$

$$= \lim \mp \left(\frac{S'M''' - SM''}{PP'^3}\right);$$

e Grösse der zweiten negativen Dimension, wie h auf gleiche Weise als im vorhergehenden §. aus n Taylor'schen Satze erhellt.

§. 55.

Wir betrachteten in den vorhergehenden §§. nur itive und negative Werthe der ersten und zweiten rivation; es bleibt uns nun noch der Uebergangs-th *Null* übrig. Sey zuerst nur

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 0,$$

Uebrigen $f''(x)$ positiv oder negativ; so folgt aus Bedeutung beider Functionen unmittelbar, dass nit für den Punct (x, y) die der Abscissenaxe allele Lage der Berührenden angezeigt ist, und s diese auf zweierlei Art statt finden kann, je nach- ı die Curve der x-Axe die hohle Seite zuwendet, velchem Falle die Curve zwischen der Axe und Berührenden liegt, oder je nachdem die erhabene e der Curve der x-Axe zugekehrt ist, wo dann Berührende zwischen Curve und Axe liegt. Im en iten } Falle muss offenbar, damit die Curve vor

und nach dem Puncte (x, y) $\left\{\begin{matrix}\text{unter}\\ \text{über}\end{matrix}\right\}$ der Berühren-
den liege, dy sowohl für ein positives als für ein ne-
gatives dx $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ seyn. Oder, wenn wir statt der
Differentiale den Differentialquotienten betrachten, es
muss beziehungsweise $\frac{dy}{dx}$ aus dem $\left\{\begin{matrix}\text{Positiven}\\ \text{Negativen}\end{matrix}\right\}$ ins
$\left\{\begin{matrix}\text{Negative}\\ \text{Positive}\end{matrix}\right\}$ übergehen, wenn man den Durchgang der
Abscisse durch den Werth, der $\frac{dy}{dx} = 0$ macht, be-
trachtet. Zugleich ist offenbar, dass der Werth der
Ordinate, der diesem Puncte entspricht, $\left\{\begin{matrix}\text{grösser}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$
als der jeder vorhergehenden oder folgenden Ordinate,
also (§. 19, 4) ein $\left\{\begin{matrix}\text{Grösstes}\\ \text{Kleinstes}\end{matrix}\right\}$ seyn wird. Alles dies wird
durch Fig. 17 und 18 erläutert. Hierbei ist jedoch
durchgängig $f(x) = y$ positiv angenommen. Ist dies
negativ, so kehren sich, wie man leicht einsieht, die
gefundenen Bestimmungen gänzlich um. Es zeigt da-
her der Werth von x, der $f'(x) = 0$ macht, im All-
gemeinen ein Grösstes oder Kleinstes an, und zwar
nach folgenden Unterscheidungen, die durch §. 53
begründet sind:

1) ist $f(x)$ *positiv*, so ist dieser Werth für $f'(x)=0$
ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$, wenn a) entweder für denselben Werth
von x, $f''(x)$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$; b) beim Durchgang der Abs-
cisse durch diesen Werth von x, $f'(x)$ aus dem
$\left\{\begin{matrix}\text{Positiven}\\ \text{Negativen}\end{matrix}\right\}$ ins $\left\{\begin{matrix}\text{Negative}\\ \text{Positive}\end{matrix}\right\}$ übergeht.

2) ist $f(x)$ *negativ*, so zeigt umgekehrt jedes der
beiden Kriterien a) und b) ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ an.

Beide Regeln lassen sich auch in eine einzige
zusammenfassen, nämlich in folgende: *Für einen
Werth von* x, *der* f'(x) = 0 *macht, ist* f(x) *ein*
$\left\{\begin{matrix}\textit{Maximum}\\ \textit{Minimum}\end{matrix}\right\}$, *wenn das Product* f(x). f''(x) *oder auch
das Product* f(x). f'(x+Δx), *wo* Δx *eine beliebig*

leine Grösse bedeutet, $\begin{Bmatrix}\textit{negativ}\\ \textit{positiv}\end{Bmatrix}$ *ist; oder, was das-elbe, wenn* f(x) *und* f″(x), *oder auch* f(x) *und* ′(x+Δx), $\begin{Bmatrix}\textit{entgegengesetzte}\\ \textit{gleichartige}\end{Bmatrix}$ *Zeichen haben.*

§. 56.

Diese Ergebnisse lassen sich nun auch rein ana-tisch durch blosse Benutzung des Taylor'schen Lehr-ıtzes gewinnen. Für $f'(x) = 0$ wird nämlich offenbar

$$f(x+\varDelta x)-f(x)=\tfrac{1}{2}\varDelta x^2\, f''(x)+\tfrac{1}{6}\varDelta x^3 f'''(x)+\ldots$$

a nun für ein hinlänglich kleines $\varDelta x$ das Zeichen es rechten Theils dieser Gleichung nur von dem er-en Gliede $\frac{1}{2}\varDelta x^2 f''(x)$ abhängt, dieses aber, da $\varDelta x$ arin in der zweiten Potenz vorkommt, nur durch ″(x) bestimmt wird, so ist $f(x+\varDelta x)-f(x)=\varDelta y$ zu-leich mit $f''(x)$ $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$, $\varDelta x$ mag positiv oder ne-ativ genommen werden. Ein positives $f(x)$ wird da-er beziehungsweise durch $\varDelta y$ $\begin{Bmatrix}\text{vermehrt}\\ \text{vermindert}\end{Bmatrix}$, ein nega-ves $\begin{Bmatrix}\text{vermindert}\\ \text{vermehrt}\end{Bmatrix}$, also im ersteren Falle ein $\begin{Bmatrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{Bmatrix}$, ı andern ein $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{Bmatrix}$ statt finden.

Um auf diesem Wege auch das andre Kriterium ı erweisen, setzen wir $x+\varDelta x=x'$; dann wird

$$f(x)-f(x+\varDelta x)=f(x'-\varDelta x)-f(x')=-\varDelta x f'(x')+ \\ +\tfrac{1}{2}\varDelta x^2 f''(x')-\ldots$$

uf gleiche Weise, wenn wir $x-\varDelta x=x_1$ setzen, wird

$$f(x)-f(x-\varDelta x)=f(x_1+\varDelta x)-f(x_1) \\ =+\varDelta x f'(x_1)+\tfrac{1}{2}\varDelta x^2 f''(x_1)+\ldots$$

Der Werth dieser beiden Reihen hängt, für hin-nglich kleine $\varDelta x$, nur vom ersten Gliede ab; da ın für ein $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{Bmatrix}$ beide zugleich $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ seyn üssen, so ist klar, dass dann $f'(x')$ $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$, dage-ən $f'(x_1)$ $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ seyn muss, wenn $f(x)$ positiv ıd dass nothwendig das Entgegengesetzte statt fin-ıt, wenn $f(x)$ negativ ist.

§. 57

Die Gleichung

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 0$$

enthält nicht nur das Kennzeichen der grössten u kleinsten Werthe der Function $f(x)$, sondern ka auch benutzt werden, um Werthe von x, für welc $f(x)$ diese Eigenschaften hat, aufzufinden: indem m nämlich $f'(x)$ aus der gegebenen Function $f(x)$ e wickelt und dann die Wurzeln der Gleichung $f'(x)=$ aufsucht, die in $f''(x)$ substituirt, je nachdem sie positives oder negatives Resultat geben, ein Kleins oder Grösstes anzeigen.

Sey z. B. $f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$,
so ist $f'(x)=b+2cx+3dx^2$,
$f''(x)=2c+6dx$.

Aus $f'(x)=0$ folgt $x^2+\frac{2c}{3d}x=-\frac{b}{3d}$, woraus beiden Werthe

$$x=\frac{-c+\sqrt{c^2-3bd}}{3d} \text{ und } x=\frac{-c-\sqrt{c^2-3b}}{3d}$$

sich ergeben. Der erste in $f''(x)$ substituirt, gi $+\sqrt{c^2-3bd}$, der andre $-\sqrt{c^2-3bd}$. Sind al diese Ausdrücke reell, was der Fall ist, so lan $c^2>3bd$, so zeigt der erste, wenn $f(x)$ für jene W the von x positiv, ein Kleinstes, der zweite ein Grö tes an.

§. 58.

Sey jetzt die zweite Derivation gleich Null, al

$$f''(x)=0.$$

In diesem Falle wird also in §. 49

$$y+k=f(x)+hf'(x)+\frac{h^3}{2.3}f'''(x)+\ldots$$

Die Gleichung der Berührenden bleibt aber

$$y+k'=f(x)+hf'(x).$$

Es ist daher

$$y+k \lesseqgtr y+k', \text{ d. i. } \frac{h_3}{2.3} f'''(x) \begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix},$$

nachdem für ein positives h, $f'''(x)$ $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ ler für ein negatives h, $f'''(x)$ $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ ist; d. h. so, wenn für ein positives h, $y+k \lesseqgtr y+k'$, so ist r ein negatives, $y+k \gtreqless y+k'$. Dies will so viel gen als: *Die Berührende liegt auf der einen Seite s Punctes* M *oberhalb, auf der andern unterhalb r Curve*, oder auch kürzer: *die Berührende ist gleich eine Schneidende.*

Diesem Paradoxon mehr Licht zu geben, fügen r noch folgende Betrachtung bei. Um zu untersu-en, welches Zeichen $f''(x)$ in der Nachbarschaft s Werthes annimmt, der es null macht, entwik-ln wir

$$f''(x+h) = f''(x) + hf'''(x) + \ldots$$
$$= hf'''(x) + \ldots \text{ (da nach der Vorauss. } f''(x) = 0.)$$

Die zweite Derivation ist also, da für hinlänglich eine h das Zeichen der Reihe nur vom ersten Gliede hängt, $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ und damit die Curve auf der posi-en Ordinatenseite $\begin{Bmatrix}\text{hohl}\\ \text{erhaben}\end{Bmatrix}$ gegen die Abscissenaxe, nachdem für ein positives h, $f'''(x)$ $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$, oder ein negatives h, $f'''(x)$ $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ ist. *Immer kehrt o auf der einen Seite des Punctes, für den* f″(x) *ll wird, die Curve der Abscissenaxe ihre hohle, f der andern ihre erhabene Seite zu;* welche? ngt von dem Zeichen der dritten Derivation ab, die, nn sie $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ für ein positives h die $\begin{Bmatrix}\text{hohle}\\ \text{erhabene}\end{Bmatrix}$ ge der Curve gegen die x-Axe anzeigt. Die Figu- 19 und 20, in denen, wie in den früheren, *Tt* Berührende andeutet, stellen diese Lagen dar. solcher Punct, bei dem die Curve von einer Ge-en zugleich berührt und geschnitten wird, heisst *Wendepunct.*

§. 59.

Diese besondere Art der Berührung, welche bei Wendepunct vorkommt, erlaubt noch eine zweite Auffassung, welche derjenigen entspricht, die in §. für die gemeine Berührung dargestellt wurde.

Zuerst nämlich lässt sich zeigen, dass hier jede dur M gehende, von der Richtung der Berührenden au noch so wenig abweichende Schneidende Ss (Fig. und 20) die Curve ausser in M noch in *zwei* Punct M' und M_1 schneidet, deren einer M folgt, der a dre vorangeht. Denn sey wieder, wie in §. 49, Gleichung der Berührenden

$$y+k'=f(x)+hf'(x),$$

der Schneidenden

$$y+k''=f(x)+h\operatorname{tang}\psi',$$

so wird dagegen die Gleichung der Curve jetzt, weg $f''(x)=0$, durch

$$y+k=f(x)+hf'(x)+\frac{h^3}{2.3}f'''(x)+\dots$$

auszudrücken seyn.

Sey nun $f'''(x)$ positiv oder negativ, so folgt ga auf dieselbe Weise wie in §. 49 und 50, dass Curve für ein positives h, d. i. auf der positiven Se von M, noch in einem Puncte M' geschnitten werd muss. Dass dasselbe aber auch von der negativ Seite gilt, folgt so.

Sey zuerst $f'''(x)$ negativ, so wird $y+k''<y$- seyn, also die Ss unter der Curve Puncte hab wenn

$$h\operatorname{tang}\psi' < hf'(x)+\frac{h^3}{2.3}f'''(x)+\dots$$

d. i. weil h negativ, wenn

$$\operatorname{tang}\psi' > f'(x)+\frac{h^2}{2.3}f'''(x)+\dots$$

oder, was dasselbe, wenn

$$\operatorname{tang}\psi'-f'(x)-\frac{h^2}{2.3}f'''(x)-\dots \text{ positiv}$$

Nun ist aber für diesen Fall tang$\psi' < f'(x)$ oder
ıng $\psi' - f'(x)$ negativ, dagegen, wenn h hinreichend
ein, $- \frac{h^2}{2.3} f'''(x) - \ldots$ positiv; folglich, wenn nur
e Differenz tang$\psi' - f'(x)$ klein genug genommen
ird, auch der ganze Ausdruck positiv. Es hat die
s also erstens Puncte auf der negativen Seite von
I unter der Curve. Dass sie aber daselbst in grös-
rer Nähe von M auch Puncte über der Curve hat,
lgt daraus, dass durch fortwährende Verminderung
n h der vorher betrachtete Ausdruck negativ wird *).
emnach hat die Ss auf der negativen Seite von M
der That noch einen zweiten Durchschnitt.

Auf die hier angenommene Voraussetzung eines
gativen $f'''(x)$ bezieht sich Fig. 19; nimmt man
$''(x)$ positiv, so ist es leicht, ganz auf dieselbe
'eise die gleichen Resultate zu erhalten. Zur Er-
uterung dieses Falles dient Fig. 20.

Je weniger hier tangψ' von $f'(x)$ verschieden ist,
sto kleiner wird das h seyn können, das einen Punct
sser der Curve bezeichnet, d. h. desto näher wer-
n die beiden Durchschnitte M' und M_1 an M heran-
cken. Fällt nun bei unendlicher Verminderung obiger
fferenz die Ss endlich mit der Tt ganz zusammen,
kann man sagen, dass im Wendepunct sich *drei*
hneidepuncte vereinigt haben, indess der gemeine
rührungspunct nur die Vereinigung von *zwei* Durch-
hnitten enthält.

---

*) Dass dieser Schluss nicht auch auf die gemeine Berüh-
g in §. 53 übertragen werden kann, beruht, wie man leicht
ıerkt, darauf, dass, weil hier h nur in der ersten und drit-
Potenz vorkommt, für ein negatives h der Ausdruck
$f'''(x)$ dasselbe Zeichen wie für ein positives h hat, was dort, wo
t dessen $\frac{h}{2} f''(x)$ steht, anders ist.

§. 60.

Da in §. 58 sich ergab, dass für ein positives *h* die Curve $\left\{\begin{matrix}\text{unter}\\\text{über}\end{matrix}\right\}$ der Berührenden liegt, je nachdem $f'''(x)$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$, so kann auch gesagt werden, dass wenn $f''(x)$ null wird, das Entscheidungskennzeichen, ob die Curve der Abscissenaxe ihre hohle oder erhabene Seite zukehrt, unverändert auf die dritte Derivation übergeht. Dies lässt sich leicht verallgemeinern. Verschwindet nämlich auch $f'''(x)$, so wird

$$y+k=f(x)+hf'(x)+\frac{h^4}{2.\ 3.\ 4}f^{IV}(x)+\ldots$$

und durch dieselben Schlüsse wie in §. 50 und 59 findet sich, dass, weil h^4 eine gerade Potenz, die Berührende auf beiden Seiten von *M* ganz ausser der Curve liegt. Allgemein: *wenn die Derivationen von der zweiten bis mit der* n*ten, also* $f''(x), f'''(x), \ldots f^{(n)}(x)$ *für einen gewissen Werth von* x *null werden, so hat die Curve für diesen Werth* $\left\{\begin{matrix}\textit{einen}\\\textit{keinen}\end{matrix}\right\}$ *Wendepunct, oder, was dasselbe, die Berührende schneidet* $\left\{\begin{matrix}\textit{zugleich}\\\textit{nicht}\end{matrix}\right\}$ *die Curve, je nachdem* n $\left\{\begin{matrix}\textit{gerade}\\\textit{ungerade}\end{matrix}\right\}$.

Nach §. 53 folgt dann weiter, *dass, wenn* n *ungerade, die Curve zu beiden Seiten des Berührungspunctes der* x*-Axe die* $\left\{\begin{matrix}\textit{hohle}\\\textit{erhabene}\end{matrix}\right\}$ *Seite zukehrt, je nachdem* f(x) *und* $f^{(n+1)}(x)$ — *die erste nicht verschwindende Derivation* — $\left\{\begin{matrix}\textit{entgegengesetzte}\\\textit{gleichartige}\end{matrix}\right\}$ *Zeichen haben; dass aber, wenn* n *gerade, unter der gleichen Voraussetzung die Curve beziehungsweise beim Durchgang durch den Berührungspunct aus der* $\left\{\begin{matrix}\textit{erhabenen}\\\textit{hohlen}\end{matrix}\right\}$ *in die* $\left\{\begin{matrix}\textit{hohle}\\\textit{erhabene}\end{matrix}\right\}$ *Lage übergeht.*

§. 61.

Wird nun noch überdies $f'(x)=0$ gesetzt, so dass also für einen gewissen Werth von x die Deri-

tionen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... $f^{(n)}(x)$ verschwin-
n, so erhalten wir eine Ergänzung der in §. 55 und
gefundenen Theorie des Grössten und Kleinsten.
sdann nämlich wird nur in den Fällen die Gleichung
$x) = 0$ noch die Anzeige eines Maximum oder
inimum seyn, wenn die Zahl der nachfolgenden suc-
ssiven Derivationen, welche null werden, eine gerade,
so die Gesammtzahl der nullwerdenden Derivationen
gerade ist; ob aber ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ statt findet, wird
s §. 55 danach entschieden, ob die Functionen $f(x)$
d $f^{(n+1)}(x)$ — die erste nicht verschwindende Deri-
tion — $\left\{\begin{matrix}\text{entgegengesetzte}\\ \text{gleichartige}\end{matrix}\right\}$ Zeichen haben. Ist dagegen die
ahl dieser, der ersten nachfolgenden, nullwerdenden
erivationen ungerade, *also die Gesammtzahl der null-
rdenden Derivationen gerade*, so hat zwar die Be-
hrende immer noch eine der Abscissenaxe parallele
age, aber der Berührungspunct ist dann immer ein
endepunct; ob dabei die Curve aus der hohlen Lage
die erhabene oder aus der erhabenen in die hohle
age übergeht, wird nach der Schlussregel des vor-
rgehenden Paragraphs entschieden.

Kommt endlich noch zu den vorigen Bedingungen
neue $f(x) = 0$ hinzu, so bleiben die gefundenen
estimmungen im Allgemeinen dieselben, nur dass
nn die Berührende mit der Abscissenaxe zusammen-
llt, und daher, wenn der Werth von x ein Maxi-
um oder Minimum anzeigt, die Curve die x-Axe
rührt, wenn er aber einem Wendepuncte angehört,
zugleich schneidet.

§. 62.

Wenn hiernach sowohl das Nullwerden der zwei-
n abgeleiteten Function allein, als auch das gleich-
itige Verschwinden der dritten und vierten oder der
itten bis sechsten u. s. f. einen Wendepunct anzeigt,
less das Verschwinden der Derivationen bis zu einem

ungeraden Grade nur einen gemeinen Berührungs-
punct giebt, so entsteht die Frage, ob diese analy-
tisch unterschiedenen Fälle nicht auch geometrische
Unterscheidungsmerkmale haben. Diese lassen sich
in der That angeben. Die Bedingung des Wende-
puncts $f''(x) = 0$ kann nämlich durch mehrere Wer-
the von x, z. B. durch zwei α, β erfüllt werden, d
dann

$$f''(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\,\varphi(x)$$

gesetzt werden kann, welche Formel für $x = \alpha$ und
$x = \beta$ verschwindet, in der aber $\varphi(x)$ eine Function
bedeuten soll, die durch Substitution keines dieser
Werthe null wird. Bildet man aus $f''(x)$ die folgende
Derivation, so findet sich, nach §. 46

$$f'''(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\,\varphi'(x) + (x-\alpha)\,\varphi(x) + (x-\beta)\,\varphi(x).$$

Diese Function verschwindet für keinen von beiden
Werthen von x, so lange diese von einander ver-
schieden; sie verschwindet aber, wenn $\alpha = \beta$ wird.
Offenbar sind aber α und β Grössen, die von den
Constanten der ursprünglichen Function $f(x)$ abhän-
gen. Sie können sich also auch nur ändern, wenn
jene sich ändern, und diese Aenderung wird stetig
seyn, wenn wir den Uebergang aus der Ungleichheit
in die Gleichheit nicht sprungweise, sondern allmälig
vor sich gehend denken. Der geometrische Sinn die-
ser Vorstellung wird aber seyn: dass man durch ste-
tige Aenderung der Constanten der die Curve aus-
drückenden Function den Zug jener dergestalt ändert,
dass zwei verschiedene Wendepuncte nun mit einander
zusammenfallen. Seyen in Fig. 21 M und M' die
Wendepuncte, durch welche die Schneidende Ss ge-
legt ist, die, vermöge des Begriffs des Wendepuncts,
die Curve noch in zwei Puncten M_1 und M'' trifft,
wenn anders durch Annäherung der Werthe α und β
an einander die Puncte M und M' einander schon nah
genug gekommen sind. Fallen endlich beide Wende-

uncte wirklich zusammen, so reduciren sich diese er Durchschnitte auf drei, die zuletzt, wie beim nfachen Wendepunct, durch Drehung der *Ss* sich i einen einzigen Punct zusammenziehen. Gleichwohl ntsteht hierdurch keineswegs wieder ein Wendepunct. enn wenn *M* und *M'* zwei *nächste* Wendepuncte waen, so musste, wenn $f''(\alpha-\omega)$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$, also $f'(\alpha+\omega)$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$, $f''(\beta-\omega)$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$ und $f''(\beta+\omega)$ wieder $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ eyn. Durch gegenseitige Annäherung von α und β ermindert sich nun zwar die Differenz $\beta-\alpha$, d. i. der aum, innerhalb dessen $f''(x)$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$, und verschwinet zuletzt gänzlich, aber $f''(\beta+\omega)$ (wenn wir β sich em Werthe α nähernd denken) ändert sein Zeichen icht; dazu wäre erforderlich, dass es zuvor null würe, was aber erst bei der wirklichen Vereinigung des unctes *M'* mit *M* geschieht. Es wird daher $f''(x)$ ach dieser Vereinigung der beiden Wendepuncte auf eiden Seiten des Vereinigungspunctes einerlei Zeihen, mithin die Curve gegen die Abscissenaxe einer-i Lage haben, jener also *kein* Wendepunct seyn.

§. 63.

Anders verhält es sich, wenn mit der dritten Devation für einen bestimmten Werth von x auch die erte verschwindet. Nehmen wir, um dieser Vorausetzung zu entsprechen,

$$f''(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,\varphi(x),$$

o $\varphi(x)$ eine Function, die weder für α noch für β der $\gamma=x$ verschwindet, so folgt (§. 46)

$$\begin{aligned}f'''(x)=&(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\varphi'(x)+(x-\alpha)(x-\beta)\varphi(x)\\&+(x-\alpha)(x-\gamma)\varphi(x)+(x-\beta)(x-\gamma)\varphi(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''''(x)=&(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\varphi''(x)+2(x-\alpha)(x-\beta)\varphi'(x)\\&+2(x-\alpha)(x-\gamma)\varphi'(x)+2(x-\beta)(x-\gamma)\varphi'(x)\\&+2(x-\alpha)\varphi(x)+2(x-\beta)\varphi(x)+2(x-\gamma)\varphi(x).\end{aligned}$$

Letztere beide Derivationen verschwinden weder für $x=\alpha$ noch für $x=\beta$ noch für $x=\gamma$, wenn nicht α,

β, γ alle drei gleich sind; d. h. also, wenn die dr durch diese Werthe der Abscissen angezeigten We depuncte in einen einzigen Punct zusammenfalle Mögen diese drei durch M, M', M'' bezeichnet we den, so dass M dem α, M' dem β, M'' dem γ en spricht, so wird, wenn $f''(\alpha-\omega)$ $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{Bmatrix}$, also $f''(\alpha+\omega)$ $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{Bmatrix}$, auch $f''(\beta-\omega)$ und $f''(\gamma+\omega)$ $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{Bmatrix}$, dage gen $f''(\beta+\omega)$ und $f''(\gamma-\omega)$ $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{Bmatrix}$ seyn, wenn, wi angenommen wird, zwischen M, M', M'' weiter kein andern Wendepuncte liegen. Da nun, wenn wir β un γ in α übergehen lassen, $f''(\gamma+\omega)$ sein Zeichen nicl ändern kann, weil $f''(x)$ erst für $x=\alpha$ null wird, s hat $f''(x)$ zu beiden Seiten des Vereinigungspunct der drei Wendepuncte entgegengesetzte Zeichen, di Curve also entgegengesetzte Lage gegen die x-Ax also ist der Vereinigungspunct ein Wendepunct. D man durch diesen dann immer eine Gerade ziehe kann, welche die Curve in noch zwei Puncten schne det, die, wenn die Schneidende in die Berührend übergeht, ebenfalls mit dem Vereinigungspunct zu sammenfallen, so kann man in diesem jetzt zusamme fünf Puncte als vereinigt betrachten.

Diese Betrachtungsweise kann beliebig weit for gesetzt werden, und so ergiebt sich das allgemei Resultat: *Wenn die successiven Derivationen* $f''(x)$ $f'''(x) \ldots\ldots f^{(n)}(x)$, *für einen bestimmten Werth von sämmtlich verschwinden, so ist der Punct der Curv der demselben entspricht, als Vereinigungspunct vo* $n-1$ *auf einander folgenden Wendepuncten oder auc von* $n+1$ *Durchschnittspuncten der Curve durch ein Gerade zu betrachten. Er ist ein gemeiner Berü rungspunct oder ein Wendepunct, je nachdem* n *u gerade oder gerade.* Puncte dieser Art heissen auc *Schlangenpuncte*, und man theilt sie, je nachde sie sich als Berührungspuncte oder als Wendepunct darstellen, in *unsichtbare* und in *sichtbare*.

§. 64.

Kommt zu den nullwerdenden Functionen $f''(x)$,
$'(x) \ldots f^{(n)}(x)$ noch $f'(x) = 0$ hinzu, so können
llkommen dieselben Betrachtungen wie im vorher-
henden §. angestellt werden, sobald man nur da-
lbst die Indices der Derivationen um eine Einheit
rmindert. Da $f'(x) = 0$ ein Maximum oder Mini-
um andeutet, oder, wie wir es zu grösserer Bequem-
hkeit im Allgemeinen benennen wollen, *eine Bie-
ng* der Curve $f(x)$ *), — so zeigen nun die n suc-
ssiven nullwerdenden Derivationen eine Vereinigung
n eben so vielen Biegungen der Curve, also von
$+1$ Durchschnittspuncten derselben an. Ob dieser
ereinigungspunct eine Biegung oder ein Wendepunct
, hängt, nach §. 61, beziehlich davon ab, ob n
gerade oder gerade ist. Nach den Ergebnissen
sselben Paragraphs wird auch entschieden, ob im
steren Falle die Biegung ein Maximum oder ein
nimum darstellt und ob im anderen Falle die
urve aus der hohlen Lage gegen die x-Axe in die
habene übergeht oder umgekehrt. Ist der Verei-
gungspunct ein Wendepunct, so werden, da er, ver-
öge des vorigen §., dann auch als Vereinigungs-
nct von $n-1$ Wendepuncten betrachtet werden
nn, und jeder der letztern eine Vereinigung eines
aximums und eines Minimums ist, unter den verei-
gten n Biegungen der Curve eben so viele Maxima
s Minima, also von jenen wie von diesen $\frac{1}{2}n$ seyn.
t dagegen der Vereinigungspunct eine Biegung, so
rd zu der gleichen Anzahl der Maxima und Minima
mer noch ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ hinzukommen, je nachdem
r Vereinigungspunct ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ ist, und dann die
ahl der $\left\{\begin{matrix}\text{Maxima}\\ \text{Minima}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(n+1)$, folglich die der
$\left.\begin{matrix}\text{linima}\\ \text{laxima}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(n-1)$ seyn. So gehen z. B. in Fig. 22

---

*) Was Fourier durch *sinuosité* bezeichnet.

die benachbarten Biegungen bei M' und M'', dere eine ein Maximum, die andre ein Minimum ist, in de Wendepunct bei M; in Fig. 23 die beiden Maxim bei M' und M''' und das Minimum bei M'' in das M ximum M; in Fig. 24 die beiden Minima bei $M_{,}$ u $M_{,,,}$ und das Maximum bei $M_{,,}$ in das Maximum b M über.

Ist endlich noch $f(x)=0$, so ist ein gemeinschaf licher Punct zwischen Curve und x-Axe angezeig und die Berührende fällt mit der x-Axe zusammen alle übrigen Umstände sind mit den eben entwickelte vollkommen identisch.

§. 65.

Kehren wir noch einmal zu §. 48 zurück, s können wir jetzt den dort zuerst begründeten Begri der Berührung sehr erweitern. Nach §. 23 könne wir nämlich als Grenze der Gleichung

$$y+k=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{2.3}f'''(x)+\ldots$$

auch die folgende

$$y+k'=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)$$

ansehen, die drei Glieder mit der ersteren gemein ha Da die Veränderliche h in dieser Gleichung auf di zweite Potenz steigt, so stellt diese eine (parabolische *Curve* dar. Sowohl die ursprüngliche als diese m derselben zusammenfallende Curve, werden in de Punct, den sie gemein haben, von einer und derse ben Geraden, deren Gleichung

$$y+k''=f(x)+hf'(x)$$

berührt, statt dessen man auch sagen kann, *dass si sich selbst berühren.* Dies würde jedoch auch fü jede parabolische Curve des zweiten Grades der Form

$$y+i=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}\varphi(x),$$

wo φ eine beliebige von f'' verschiedene Functio bezeichnet, der Fall seyn. Allein die obige Curv

nterscheidet sich von allen Curven desselben Grades
cht weniger, als die gerade Berührende von der
ırch den Berührungspunct gezogenen Schneidenden.
s ist nämlich die Ordinaten-Differenz der gegebenen
urve und der sich an sie anschliessenden

$$(y+k)-(y+k')=\frac{h^3}{2.3}f'''(x)+\ldots;$$

ıgegen die Differenz der Ordinaten der gegebenen
urve und jeder andern parabolischen Curve vom
veiten Grade, die mit ihr eine gemeinschaftliche Be-
hrende hat,

$$(y+k)-(y+i)=\frac{h^2}{2}[f''(x)-\varphi(x)]+\ldots$$

Vie klein nun auch die Differenz seyn möge, immer
rd doch, durch hinlängliche Verminderung von h,
em Zahlwerthe nach

$$\frac{h^3}{2.3}f'''(x)+\ldots<\frac{h^2}{2}[f''(x)-\varphi(x)]+\ldots$$

emacht werden können. Die Curve, deren Gleichung

$$y+k'=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x),$$

hliesst sich also an die vorgelegte Curve in dem
ıncte, in welchem beide eine gemeinschaftliche ge-
dlinige Berührende haben, enger an als jede andere
ırve desselben Grades. Man nennt dieses Anschlies-
n eine *Berührung vom zweiten Grade* oder *Oscu-
tion.* Es zeigt sich aus dieser Lehre, dass, ob-
eich es unmöglich war, zwischen der Curve und der
e berührenden Geraden noch eine zweite gerade Be-
hrungslinie durch den Berührungspunct zu ziehen,
ch zwischen zwei sich berührenden Curven noch un-
hlig viele andere krumme Berührungslinien sich zie-
n lassen*). Alle diese Curven zerfallen in *Berüh-
nde von Aussen* und *Berührende von Innen*, je

*) Für den Kreis lehrt dies bekanntlich schon die Elementar-
ometrie.

nachdem $f''(x) - \varphi(x)$ positiv oder negativ ist. De
Uebergang von der einen Classe zur andern wi
$f''(x) = \varphi(x)$ seyn. Diese Bedingung erfüllt die *osci
lirende Curve, die also auch als die Grenze zwische
den von Innen und von Aussen berührenden krum
men Linien* sich darstellt. — In Fig. 25 ist CD die ge
gebene Curve, $C_{,}D_{,}$ und $C'D'$ sind berührende Curve
AB die osculirende.

Es unterliegt nicht der mindesten Schwierigkei
zu zeigen, dass die Curve, für welche

$$y + k' = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{2.3} f'''(x),$$

mit der vorgegebenen eine noch innigere Berührun
eingeht, als die eben betrachtete osculirende, wo
durch man auf den Begriff einer *Berührung vo
dritten Grade* geführt wird. So fortfahrend komm
man auf *Berührungen vom 4ten, 5ten u. s. f. allg
mein von höheren Graden.* Auf diese Weise kan
man zu jeder parabolischen Curve vom $m$ten Grad
Linien vom 1sten, 2ten, 3ten, ... $(m-1)$ten Grad
angeben, die eine immer innigere Berührung mit il
eingehen.

§. 66.

So wie die geradlinigen, so können wir nun auc
die krummlinigen Berührenden von der Seite auffasse
dass wir sie als schneidende Linien betrachten, dere
Durchschnittspuncte sich im Berührungspuncte vere
nigt haben. Sey nämlich

$$y + k = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{2.3} f'''(x) + .$$

wieder die Gleichung der vorgelegten Curve, so wir
die einer parabolischen Curve von niedrigerem Grad
die einen Punct mit ihr gemein hat, durch

$$y + k' = f(x) + hP_1 + h^2P_2 + h^3P_3 + \ldots$$

ausgedrückt werden können, wo P_1, P_2, P_3, ... un
bestimmte, h nicht enthaltende, Grössen sind, und di

genschaft, dass beide Curven den Punct, dessen ordinaten x, y, gemein haben, dadurch bezeichnet rd, dass das erste, von h unabhängige Glied in iden $f(x)$ ist. Da nun P_1, P_2, $P_3 \ldots$ noch unstimmt sind, so können wir sie so bestimmen, dass e zweite Curve die erste in so viel Puncten als jener össen vorhanden sind, schneidet. Seyen nämlich e Abscissen dieser Durchschnittspuncte $x+h$, $x+2h$, $+3h$ u. s. f., so sind die zugehörigen Ordinaten der iden Curven gleich zu setzen, woraus folgende Gleiungen hervorgehen:

$$f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{2.3}f'''(x)+\ldots=$$
$$=f(x)+hP_1+h^2P_2+h^3P_3+\ldots$$

$$f(x)+2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2}f''(x)+\frac{(2h)^3}{2.3}f'''(x)+\ldots=$$
$$=f(x)+2hP_1+(2h)^2P_2+(2h)^3P_3+\ldots$$

$$f(x)+3hf'(x)+\frac{(3h)^2}{2}f''(x)+\frac{(3h)^3}{2.3}f'''(x)+\ldots$$
$$=f(x)+3hP_1+(3h)^2P_2+(3h)^3P_3+\ldots$$

s. f. Die erste derselben vereinfacht sich, wenn in $f(x)$ auf beiden Seiten abzieht und den Rest rch h dividirt, in

$$f'(x)+\frac{h}{2}f''(x)+\frac{h^2}{2.3}f'''(x)+\ldots=$$
$$=P_1+hP_2+h^2P_3+\ldots$$

sst man hier h ohne Ende abnehmen, so vereinigt h der zweite Durchschnitt mit dem ersten, die Cur- berühren sich einfach, und es wird

$$P_1=f'(x).$$

bstituiren wir diesen Werth in der zweiten Gleiing, lassen beiderseits die dann gleichen zwei Angsglieder hinweg, und dividiren den Rest durch $)^2$, so kommt

$$\frac{f''(x)}{2}+\frac{2h}{2.3}f'''(x)+\ldots=P_2+2hP_3+\ldots,$$

woraus bei unendlicher Abnahme von h

$$P_2 = \frac{1}{2} f''(x).$$

Dann aber rückt auch der dritte Durchschnitt mit d
bereits vereinigten zwei andern zusammen. Eben
wird gezeigt, dass der vierte Durchschnitt mit d
übrigen zusammenfällt, wenn noch

$$P_3 = \frac{1}{2.\ 3} f'''(x)$$

u. s. f. (vgl. Fig. 26, wo M, M', M'', drei Dur
schnitte der Curven).

Hieraus erhellt, dass, wenn sich zwei krum
Linien im $n$ten Grade berühren, der Berührungspu
als Vereinigungspunct von $n+1$ gemeinschaftlic
Durchschnittspuncten derselben betrachtet werden mu

Da die Zahl der bestimmbaren Grössen P_1, P
P_3 u. s. f. gleich dem Grade der berührten Curve
so folgt hieraus, dass keine Curve eine Berühru
von höherem, wohl aber von niedrigerem Grade e
gehen kann, als der ihrer Gleichung ist.

Noch ist zu bemerken, dass für jede Berühru
von geradem Grade der analytische Ausdruck für
Differenz der Ordinaten der einander berührenden
nien mit einem Gliede anfängt, das eine unger
Potenz von h als Factor enthält (z. B. bei der Ber
rung vom zweiten Grade mit $\frac{h^3}{2.3} f'''(x)$), und da
für hinlänglich kleine h das Zeichen dieser Differe
welches dann nur von ihrem ersten Gliede abhän
sich jederzeit ändert, wenn man h mit $-h$ vertaus
Hieraus folgt, dass *für jede Berührung von ge*
dem Grade die Berührende zur Rechten und zur L
ken des Berührungspunctes auf verschiedenen Sei
der berührten Linie liegt, also dann *die Berühren*
zugleich eine Schneidende ist.

§. 67.

Die so eben entwickelte Lehre von den höhe
Berührungen setzt uns in den Stand, den successiv

ferentialen dy, d^2y, d^3y u. s. f. noch eine andre slegung zu geben, als ihnen, zufolge §. 53 und 54 ommt. Bezeichnen wir nämlich mit $y_{\prime}$ die zu $x+h$ ıörige Ordinate der Geraden, welche die durch die ichung $y=f(x)$ gegebene Curve im Puncte $(x, y($ ührt; ebenso mit $y_{\prime\prime}$, $y_{\prime\prime\prime}$ u. s. f. die Ordinaten der se Curve in demselben Puncte im 2ten, 3ten Grade s. f. berührenden parabolischen Curven für dieselbe scisse $x+h$, so ist, vermöge §. 65,

$$y_{\prime}-y=hf'(x)$$
$$y_{\prime\prime}-y_{\prime}=\tfrac{1}{2}h^2f''(x)$$
$$y_{\prime\prime\prime}-y_{\prime\prime}=\frac{1}{2.3}h^3f'''(x), \text{ u. s. f.}$$

ssen wir nun h ohne Ende abnehmen, so reduciren ı diese Ausdrücke auf folgende:

$$\lim\,(y_{\prime}-y) = dy$$
$$\lim\,(y_{\prime\prime}-y_{\prime}) = \tfrac{1}{2}d^2y$$
$$\lim\,(y_{\prime\prime\prime}-y_{\prime\prime}) = \frac{1}{2.3}\,d^3y, \text{ u. s. f.}$$

drücken daher die in die Coefficienten $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2.3}$, . f. beziehlich multiplicirten Differentiale die in der htung der Ordinaten genommenen Abstände der im n, 2ten, 3ten Grade u. s. f. die gegebene Curve beenden parabolischen Linien von einander für Puncte , welche dem gegebenen Puncte (x, y) unendlich e liegen. Hierbei wird die berührende Gerade mit parabolischen Curven in Eine Reihe gestellt und Abstand von der durch den gegebenen Punct pal zur Abscissenaxe gelegten Geraden genommen. leich ergiebt sich auch hieraus eine einfache georische Auslegung des Taylor'schen Lehrsatzes *)

) Man sucht dieselbe gleichwohl, wie nahe sie auch liegt, in ehrbüchern — wenigstens in den bekannteren — vergebens. ls derselben lassen sich auch die §§. 40 ff. unter einem neuen htspunote betrachten.

für jedes endliche h, indem auch für endliche Werth von h die Ausdrücke $hf'(x)$, $\frac{1}{2}h^2 f''(x)$, $\frac{1}{2.3}h^3 f'''(x$ u. s. f. dieselben Abstände ausdrücken als beziehlic dy, $\frac{1}{2}d^2y$, $\frac{1}{2.3}d^3y$ u. s. w. für unendlich kleine Entfernungen. Sey z. B. in Fig. 25 CD eine durch ein Gleichung vom 5ten Grade gegebene Curve und T $C_\prime D_\prime$, $C'D'$, AB die Linien, welche sie im 1sten 2ten, 3ten, 4ten Grade berühren, so würde, wen $Pp=h$ gesetzt wird, das Stück der verlängerten Ordinate mp zwischen MQ und Mt das Glied $hf'(x)$ das Stück derselben Ordinate zwischen Mt und $C_\prime D$ das zweite Glied $\frac{1}{2}h^2 f''(x)$, das Stück zwischen $C_\prime D_\prime$ un $C'D'$... $\frac{1}{2.3}h^3f'''(x)$, das zwischen $C'D'$ u. AB.. $\frac{1}{2.3.4}h^4f^{IV}(x$ endlich dasjenige zwischen AB und CD... $\frac{1}{2\ldots5}$ h^5 f $(x$ darstellen. Nach der Zeichnung würde in diesem Fall $f'(x)$, $f'''(x)$, $f^{V}(x)$ positiv, dagegen $f''(x)$ und $f^{IV}(x$ negativ seyn, indem die den $\begin{cases}\text{ersteren}\\\text{letzteren}\end{cases}$ Functionen entsprechenden auf der mp oder ihrer Verlängerung genommenen Stücke zur $\begin{cases}\text{Vergrösserung}\\\text{Verkleinerung}\end{cases}$ der Ordinate $f(x)=M$ beitragen.

§. 68.

Endlich wollen wir noch eine geometrische Bedeutung der Derivationen nachweisen, die von allen bisher erwähnten verschieden ist, von der wir aber oft Gebrauch machen werden. So wie nämlich

$$y=f(x)$$

durch eine Curve, deren Coordinaten x und y waren, dargestellt wurde, so lassen sich auch die abgeleiteten Functionen

$$y'=f'(x);\ y''=f''(x);\ y'''=f'''(x) \text{ u. s. w.}$$

auf gleiche Weise durch Curven repräsentiren, von

nen x und y', x und y'', x und y''' u. s. f. bezieh-
h die Coordinaten sind. Die erste dieser Curven
rsinnlicht die Lagen der Berührungslinien an der
ırve, für welche $y=f(x)$. Wo *sie* Durchschnitte
t, also $y'=0$ wird, da hat jene Maxima und Mini-
ı; ihre $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\\text{negativen}\end{matrix}\right\}$ Ordinaten zeigen $\left\{\begin{matrix}\text{spitze}\\\text{stumpfe}\end{matrix}\right\}$ Winkel
r Berührenden mit der x-Axe an. Die zweite Linie
$=f''(x)$ zeigt die Biegungen und Wendepuncte der
sprünglichen. Wo $y''=0$, da ist ein Wendepunct;
die Ordinaten $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\\text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ mit denen der ursprüng-
hen sind, da wendet die gegebene Curve der Ab-
ssenaxe die $\left\{\begin{matrix}\text{erhabene}\\\text{hohle}\end{matrix}\right\}$ Seite zu. Eben so versinn-
ht, wenn wir $y'=f'(x)$ als ursprüngliche Curve be-
ıchten, die Curve $y''=f''(x)$ die Lage ihrer Tan-
nten, $y'''=f'''(x)$ die Biegungen und Wendepuncte
. s. f. Allgemein stellen je drei auf einander fol-
nde Derivationen

$$y^{(n-1)}=f^{(n-1)}(x);\ y^{(n)}=f^{(n)}(x);\ y^{(n+1)}=f^{(n+1)}(x);$$

ei Curven dar, von denen, die erste als die ursprüng-
he betrachtet, die beiden anderen Lage der Berüh-
nden und Biegungen und Wendepuncte jener ersten
ranschaulichen.

Vierter Abschnitt.

Von den Wurzeln der Gleichungen im Allgemeinen.

---

§. 69.

Wenn eine algebraische Gleichung der Form

$$f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

eine reelle Wurzel α hat, so ist ihr linker Theil ir mer durch den Ausdruck $x - \alpha$ ohne Rest dividirba Denn gesetzt, der Quotient dieser Division, der c fenbar wenigstens als Theil ein Polynom der Form

$$x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + b_2 x^{m-3} + \ldots + b_{m-2} x + b_{m-1}$$

enthalten muss, lasse noch einen Rest R übrig, s dass dem vorstehenden ganzen Quotienten noch d Bruch $\frac{R}{x-\alpha}$ beizufügen wäre, so würde, nach de Begriffe der Division, seyn:

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = \left(x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} + \frac{R}{x-\alpha}\right)(x-\alpha)$$

$$= (x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1})(x-\alpha) + R.$$

Ist aber α eine Wurzel, so muss für $x = \alpha$ d linke Theil dieser Gleichung in der That null werde Da nun auch das polynomische Glied des recht Theils, wegen des Factors $x - \alpha$ für $x = \alpha$ verschwi det, so wird auch $R = 0$; es ist also

$$f(x)=(x^{m-1}+b_1x^{m-2}+b_2x^{m-3}+\ldots+b_{m-1})(x-\alpha).$$

och leichter übersieht man die Gültigkeit des umge-
ehrten Satzes, dass nämlich, wenn $(x-\alpha)$ ein Factor
on $f(x)$ ist, α auch eine Wurzel der Gleichung
$x)=0$ seyn muss. Es ergiebt sich dies nämlich
araus, dass die Substitution von α für x den $f(x)$
eichgeltenden Werth wirklich null macht, was das
ennzeichen eines Wurzelwerthes ist.

§. 70.

Giebt es ferner einen Werth von $x=\beta$, der den
olynomischen Factor von $f(x)$,

$$x^{m-1}+b_1x^{m-2}+b_2x^{m-3}+\ldots+b_{m-1}$$

erschwinden macht, so wird nicht nur dieser in ein
roduct der Form

$$(x^{m-2}+c_1x^{m-3}+c_2x^{m-4}+\ldots+c_{m-2})(x-\beta)$$

erlegbar, sondern es wird auch, da zugleich $(x-\beta)$
in Factor von $f(x)$ selbst ist, β eine Wurzel der
leichung $f(x)=0$ seyn.

Da nun bei dieser Voraussetzung $f(x)$ die beiden
actoren $(x-\alpha)$ und $(x-\beta)$ zugleich enthält, so be-
itzt dieselbe Function auch den quadratischen Factor

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x-\alpha)(x-\beta).$$

Es folgt aber nicht mit gleicher Allgemeinheit der
ngekehrte Satz: dass, wenn $f(x)$ einen quadratischen
actor der Form

$$x^2+\mu x+\nu$$

at, dieser immer nothwendig in zwei einfache (reelle(
uflösbar seyn müsse. Denn setzen wir denselben
$=0$, so wird der hieraus entstehenden quadratischen
leichung Gnüge gethan, wenn

$$x=-\frac{\mu}{2}\pm\sqrt{\frac{\mu^2}{4}-\nu}.$$

o lange also $\frac{\mu^2}{4}>\nu$, hat die Gleichung $x^2+\mu x+\nu=0$

die beiden reellen und ungleichen Wurzeln $-\frac{\mu}{2}+\sqrt{\frac{\mu^2}{4}-}$
und $-\frac{\mu}{2}-\sqrt{\frac{\mu^2}{4}-\nu}$. Sie werden beide gleich, näm-
lich $=-\frac{\mu}{2}$, wenn $\frac{\mu^2}{4}=\nu$; sie werden imaginär fü
$\frac{\mu^2}{4}<\nu$; oder, den Ausdruck in aller Strenge genom-
men, der quadratische Factor $x^2+\mu x+\nu$ ist dan
nicht in einfache Factoren auflösbar. Der letzter
Fall kann jedoch durch Einführung des Begriffs de
imaginären Grössen als homogen mit dem erstere
betrachtet werden, indem man dann sagt, dass di
Gleichung Paare von Wurzeln der Form $t+u\sqrt{-1}$ un
$t-u\sqrt{-1}$ oder die Function $f(x)$ einfache Factore
der Form $(x-t-u\sqrt{-1})$ und $(x-t+u\sqrt{-1})$ habe, w
t und u reelle Grössen sind. Da übrigens aus de
Vorstehenden erhellt, dass durch Vermehrung von
oder Verminderung von μ die reelle Wurzel in ein
imaginäre übergeht, μ und ν aber von den in $f(x$
vorkommenden Constanten abhängen, so kann auc
vollkommen richtig jede imaginäre Wurzel als ein
durch Aenderung der Constanten der Gleichung *ver-
loren gegangene reelle Wurzel* betrachtet werden.

Es entsteht nun aber überhaupt die Frage, o
eine Gleichung der Form $f(x)=0$ immer nothwendi
reelle oder imaginäre Wurzeln haben, oder, was da
selbe ist, ob der Ausdruck $f(x)$ sich immer in einfa-
che oder quadratische Factoren zerlegen lassen müss
Es ist klar, dass nur das letztere nachgewiesen z
werden braucht, da der imaginäre Factor $(x-t-u\sqrt{-1}$
wenn $u=0$ wird, in den reellen $(x-t)$ übergeht, ode
was gleichviel, die in imaginärer Form gegebene Wu
zel $x=t+u\sqrt{-1}$, unter dieser Voraussetzung, eine
reellen Werth t enthält. Alles kommt also darauf a
zu zeigen, dass, wenn man in $f(x)$, $t+u\sqrt{-1}$ für

-tzt, sich in der That reelle Werthe von t und u -issen finden lassen, für welche $f(x)$ sich auf Null -ducirt.

§. 71.

Zum Behuf dieser Nachweisung ist es nöthig, noch -ein paar bekannte Sätze zu erinnern, deren Ab--tung jedoch zum Ueberfluss hier wenigstens kurz -gedeutet werden soll. Der *erste* ist der, dass jede -aginäre Grösse $t+u\sqrt{-1}$ sich auf die Form

$$r(\cos v+\sin v.\sqrt{-1})$$

-ingen lässt. Denn soll die Gleichung

$$t+u\sqrt{-1}=r(\cos v+\sin v.\sqrt{-1})$$

-lten, so muss, da nur Gleichartiges verglichen wer--n kann, für sich

$$t=r\cos v \text{ und } u=r\sin v$$

-yn. Hieraus folgt

$$\cos v=\frac{t}{r} \text{ und } \sin v=\frac{u}{r},$$

-d durch Quadrirung beider Ausdrücke

$$t^2+u^2=r^2,$$

- dass also hierdurch r und v bestimmt sind.

Zweitens ist

$$(\cos v+\sin v.\sqrt{-1})^n=\cos nv+\sin nv.\sqrt{-1};$$

- n zwar jede reelle Grösse bedeuten kann, es je--ch für unsern Zweck hinreicht, die Richtigkeit der -hauptung für ein ganzes positives n darzuthun. Bil--n wir nämlich noch einen zweiten Ausdruck dersel--n Form, $\cos z+\sin z.\sqrt{-1}$, wo z beliebig, so wird -s Product

$$(\cos v+\sin v.\sqrt{-1})(\cos z+\sin z.\sqrt{-1})=\cos v\cos z-\sin v\sin z$$
$$+(\sin v\cos z+\cos v\sin z)\sqrt{-1},$$

$$\text{d. i. } =\cos(v+z)+\sin(v+z).\sqrt{-1}.$$

-tzt man $z=v$, so geht die Formel über in

$$(\cos v+\sin v.\sqrt{-1})^2=\cos 2v+\sin 2v.\sqrt{-1}.$$

-ird diese wieder mit $(\cos z+\sin z.\sqrt{-1})$ multiplicirt,

so muss, da hier nun $2v$ die Stelle einnimmt, die v[illegible] her v zukam, das Resultat

$$=\cos(2v+z)+\sin(2v+z).\sqrt{-1}$$

seyn, daher, wenn wieder $z=v$ gesetzt wird, si[illegible] ergiebt

$$(\cos v+\sin v.\sqrt{-1})^3=\cos 3v+\sin 3v.\sqrt{-1}.$$

Es ist klar, dass dies Verfahren beliebig weit fort[illegible] setzt und damit, so wie durch die gewöhnliche V[illegible] vollständigungsart dieser Induction (den sogenannt[illegible] Beweis von n auf $n+1$) der behauptete Satz stre[illegible] erwiesen werden kann.

§. 72.

Werde nun in der Gleichung

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=[illegible]$$

$$x=t+u\sqrt{-1}=r(\cos v+\sin v.\sqrt{-1})$$

gesetzt, so giebt die Anwendung des eben erwiesen[illegible] Satzes*)

---

*) Cauchy (*analyse algébr. I. p.* 329), von dem die in die[illegible] und den beiden folgenden §§. enthaltene Beantwortung der am E[illegible] von §. 70 enthaltenen Frage entlehnt ist, giebt der Entwickel[illegible] dadurch eine noch etwas allgemeinere Form, dass er selbst die [illegible] efficienten a_0, a_1, a_2 u. s. f. als Imaginären betrachtet, wo[illegible] durch $\varrho_0(\cos\vartheta_0+\sin\vartheta_0.\sqrt{-1})$, $\varrho_1(\cos\vartheta_1+\sin\vartheta_1.\sqrt{-}$[illegible] $\varrho_2(\cos\vartheta_2+\sin\vartheta_2\sqrt{-1})$ u. s. f. ausgedrückt werden können, [illegible] wodurch nun

$$f(t+u\sqrt{-1})=\varrho_0 r^m\cos(mv+\vartheta_0)+\varrho_1 r^{m-1}(\cos(m-1)v+\vartheta_1)+\ldots$$
$$+\varrho_{m-1}r.\cos(v+\vartheta_{m-1})+\varrho_m\cos[illegible]$$
$$+[\varrho_0 r^m\sin(mv+\vartheta_0)+\varrho_1 r^{m-1}\sin((m-1)v+\vartheta_1)+\ldots$$
$$+\varrho_{m-1}r\sin(v+\vartheta_{m-1})+\varrho_m\sin\vartheta_m]\sqrt{[illegible]}$$

wird. Diese Voraussetzung würde nicht erlaubt haben, die Func[illegible] durch Eine Curve darzustellen und war daher für unsre Betrachtu[illegible] weise unbrauchbar. Man sieht übrigens leicht, dass durch die [illegible] schränktere Voraussetzung der Gang des Beweises nicht im min[illegible] sten sich ändert.

$$(t+u\sqrt{-1}) = a_0 r^m (\cos mv + \sin mv.\sqrt{-1})$$
$$+ a_1 r^{m-1}(\cos(m-1)v + \sin(m-1)v.\sqrt{-1})$$
$$+ a_2 r^{m-2}(\cos(m-2)v + \sin(m-2)v.\sqrt{-1})$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$+ a_{m-1} r (\cos v + \sin v.\sqrt{-1})$$
$$+ a_m ;$$

er, wenn man in dieser Entwickelung den reellen eil von dem imaginären scheidet,

$$(t+u\sqrt{-1}) = a_0 r^m \cos mv + a_1 r^{m-1} \cos(m-1)v +$$
$$+ a_2 r^{m-2} \cos(m-2)v + \ldots + a_{m-1} r \cos v + a_m$$
$$a_0 r^m \sin mv + a_1 r^{m-1} \sin(m-1)v + a_2 r^{m-2} \sin(m-2)v + ..$$
$$\ldots + a_{m-1} r \sin v] \sqrt{-1},$$

s wir zur Abkürzung durch

$$\chi(t, u) + \psi(t, u)\sqrt{-1}$$

zeichnen wollen. Soll dieser Ausdruck $=0$ seyn, erfordert dies nothwendig, dass zugleich

$$\chi(t, u) = 0 \text{ und } \psi(t, u) = 0 \text{ sey.}$$

ese beiden Gleichungen sind aber auch durch die Eine

$$[\chi(t, u)]^2 + [\psi(t, u)]^2 = 0$$

geben, deren linker Theil zur Abkürzung durch

$$F(t, u)$$

zeichnet werden mag. Es kann also als erwiesen trachtet werden, dass $f(x) = 0$ eine Wurzel der rm $t + u\sqrt{-1}$ hat, wenn sich darthun lässt, dass reelle Werthe von t und u giebt, die der Bedingng

$$F(t, u) = [\chi(t, u)]^2 + [\psi(t, u)]^2 = 0$$

nüge leisten.

§. 73.

Entwickeln wir die in $F(t,u)$ enthaltenen beiden adrate wirklich und heben als gemeinsamen Factor ^{n} aus, so kommt, wenn die Glieder nach den Ponzen von r geordnet werden,

$$[\chi(t,u)]^2 = r^{2m}\Big\{a_0^2 \cos mv^2 + \frac{2a_0a_1 \cos mv.\cos(m-1)v}{r} +$$

$$+ \frac{a_1^2 (\cos(m-1)v)^2 + 2a_0a_2 \cos mv.\cos(m-2)v}{r^2} + \ldots\Big\}$$

$$[\psi(t,u)]^2 = r^{2m}\Big\{a_0^2 \sin mv^2 + \frac{2a_0a_1 \sin mv.\sin(m-1)v}{r} +$$

$$+ \frac{a_1^2 (\sin(m-1)v)^2 + 2a_0a_2 \sin mv.\sin(m-2)v}{r^2} + \ldots\Big\}$$

$$F(t,u) = r^{2m}\Big\{a_0^2 + \frac{2a_0a_1 \cos v}{r} + \frac{a_1^2 + 2a_0a_2 \cos 2v}{r^2} + \ldots\Big\}$$

Wächst hier r ins Unendliche, was geschieht, wenn t oder u oder beide zugleich unendlich werden, so reducirt sich in dem letzten Ausdruck der Inhalt der Parenthese auf a_0^2, da die Cosinus der Vielfachen von v nicht grösser als die Einheit werden können; es wird also dann $F(t,u)$ unendlich. *Endliche* Werthe erhält also diese Function nur, wenn t und u zugleich endlich sind; und *wenn* es einen oder mehrere Werthe dieser Grössen giebt, bei welchen die Function *verschwindet*, so müssen es *endliche* seyn. Gesetzt nun, es gäbe keine solchen Werthe, so ist doch so viel gewiss, dass $F(t,u)$ als Summe zweier Quadrate nie negativ werden kann. Nun lässt sich leicht zeigen, dass sowohl $\chi(t,u)$ als $\psi(t,u)$, folglich auch $F(t,u)$ in Beziehung auf t und u ganze algebraische Functionen sind. Denn entwickeln wir $f(t+u\sqrt{-1})$ nach dem Taylor'schen Lehrsatz, so findet sich

$$\chi(t,u) = f(t) - \frac{u^2}{2} f''(t) + \frac{u^4}{2.3.4} f^{\text{IV}}(t) - \ldots$$

$$\psi(t,u) = uf'(t) - \frac{u^3}{2.3} f'''(t) + \frac{u^5}{2\ldots5} f^{\text{V}}(t) - \ldots,$$

Ausdrücke, in denen auch die Functionen $f(t)$, $f'(t)$ u. s. f. ganze algebraische sind. Denkt man daher diese entwickelt, so wird das allgemeine Glied beider die Form $Ht^\alpha u^\beta$ haben, in welcher α und β ganze positive Zahlen sind. Ein solcher Ausdruck, und mit-

in auch die ganze Function, ändert sich aber mit t nd u zugleich *stetig*. Denn ändre sich t um ωh und um ωk, wo ω, wie früher, eine unendlich kleine irösse bedeutet und h und k willkürliche endliche irössen sind, so ist, entwickelt,

$$H(t+\omega h)^\alpha\,(u+\omega k)^\beta = Ht^\alpha\,u^\beta + \omega H(\alpha t^{\alpha-1}u^\beta h + \beta t^\alpha\,u^{\beta-1}k) + \ldots,$$

o das zweite die Aenderung von $Ht^\alpha u^\beta$ ausdrückende lied der Entwickelung nur dann schlechthin null wird, enn für besondere Werthe von t, u, h und k der ıhalt der in ωH multiplicirten Parenthese verschwinet, im Allgemeinen aber einen endlichen Werth hat. endert sich demnach $F(t,u)$ mit t und u zugleich tetig, so muss es eine unterste Grenze geben, welhe diese Function, wie sie auch mit t und u steigen nd fallen möge, ein oder mehrmal erreicht. Bezeichen wir sie durch A, die Werthe von t uud u aber, ie ihr entsprechen, durch t_1 und u_1, so ist also

$$F(t_1, u_1) = A,$$

nd es darf, wenn wir $t=t_1+\omega h$, $u=u_1+\omega k$ setzen, o h, k, ω ihre vorige Bedeutung behalten, die Diferenz

$$F(t_1+\omega h,\ u_1+\omega k) - F(t_1,u_1)$$

ie negativ werden, wie klein auch ω seyn möge.

§. 74.

Um diese Bedingung weiter zu entwickeln, kehren ir wieder zu der ursprünglichen Function $f(x)$ zurück. ubstituiren wir in dieser

$$x = (t_1+u_1\sqrt{-1}) + \omega(h+k\sqrt{-1})$$

nd bemerken, dass dann

$$f(t_1+u_1\sqrt{-1}+\omega\,(h+k\sqrt{-1})) = \chi(t_1+\omega h, u_1+\omega k) + \psi(t_1+\omega h,\ u_1+\omega k).\sqrt{-1},$$

o ist klar, dass die wirkliche Entwickelung der ganzen lgebraischen Functionen χ, ψ, wenn sie nach den teigenden Potenzen von $\omega(h+k\sqrt{-1})$ geordnet wird,

Coefficienten der Form $P+Q\sqrt{-1}$ haben muss, w
P und Q Functionen von t_1, u_1 sind. Bezeichne
wir daher, zur Bequemlichkeit der Rechnung, dies
Coefficienten der Reihe nach durch

$$R_0(\cos V_0+\sin V_0\sqrt{-1}),\ R_1(\cos V_1+\sin V_1\sqrt{-1}$$

$R_2(\cos V_2+\sin V_2\sqrt{-1})$ u. s. f. und setzen

$$h+k\sqrt{-1}=\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}),$$

so wird

$$f(t_1+u_1\sqrt{-1}+\omega(h+k)\sqrt{-1})=R_0(\cos V_0+\sin V_0\sqrt{-1}$$
$$+\omega\varrho R_1(\cos(V_1+\varphi)+\sin(V_1+\varphi)\sqrt{-1})+\ldots$$
$$+\omega^m\varrho^m R_m(\cos(V_m+m\varphi)+\sin(V_m+m\varphi).\sqrt{-1}$$

und daher

$$\chi(t_1+\omega h,u_1+\omega k)=R_0\cos V_0+\omega\varrho R_1\cos(V_1+\varphi)+\ldots$$
$$+\omega^m\varrho^m R_m\cos(V_m+m\varphi)$$
$$\psi(t_1+\omega h,u_1+\omega k)=R_0\sin V_0+\omega\varrho R_1\sin(V_1+\varphi)+\ldots$$
$$+\omega^m\varrho^m R_m\sin(V_m+m\varphi$$

mithin

$$F(t_1+\omega h,u_1+\omega k)=[R_0\cos V_0+\omega\varrho R_1\cos(V_1+\varphi)+\ldots$$
$$+\omega^m\varrho^m R_m\cos(V_m+m\varphi)]$$
$$+[R_0\sin V_0+\omega\varrho R_1\sin(V_1+\varphi)+\ldots$$
$$+\omega^m\varrho^m R_m\sin(V_m+m\varphi)]$$
$$=R_0^2+2\omega\varrho R_0[R_1\cos(V_1-V_0+\varphi)+\ldots$$
$$+\omega^{m-1}\varrho^{m-1}R_m\cos(V_m-V_0+m\varphi)$$
$$+\omega^2\varrho^2\left\{\begin{array}{l}[R_1\cos(V_1+\varphi)+\ldots\\ \qquad+\omega^{m-1}\varrho^{m-1}R_m\cos(V_m+m\varphi)]^2\\ +[R_1\sin(V_1+\varphi)+\ldots\\ \qquad+\omega^{m-1}\varrho^{m-1}R_m\sin(V_m+m\varphi)]^2\end{array}\right.$$

woraus, wenn man bemerkt, dass, für $\omega=0$, di
Gleichung in

$$F(t_1,u_1)=R_0^2=A$$

übergeht, also $R_0=A^{\frac{1}{2}}$ zu setzen ist, folgt, dass

$$F(t_1+\omega h,\ u_1+\omega k) - F(t_1,\ u_1) =$$
$$= 2\omega\varrho A^{\frac{1}{2}}[R_1(\cos V_1 - V_0+\varphi)+\ldots + \omega^{m-1}\varrho^{m-1}R_m\cos(V_m - V_0+m\varphi)]$$
$$+\omega^2\varrho^2\left\{\begin{aligned}&[R_1\cos(V_1+\varphi)+\ldots + \omega^{m-1}\varrho^{m-1}R_m\cos(V_m-V_0+m\varphi)]^2\\&+[R_1\sin(V_1+\varphi)+\ldots + \omega^{m-1}\varrho^{m-1}R_m\sin(V_m+m\varphi)]^2\end{aligned}\right\}$$

Das zweite, in $\omega^2\varrho^2$ multiplicirte Glied dieses Ausucks ist immer positiv. Das Zeichen des ersten in) multiplicirten Polynoms hängt aber, wegen der Kleinit von ω, von demjenigen des ersten Gliedes ab. Nun innen von den Grössen R_1, R_2, ... R_m zwar eini-, nicht aber alle zugleich null werden, weil dann

$$F(t_1+\omega h,\ u_1+\omega k) = F(t_1,\ u_1)$$

yn würde, was nach der Form dieser Function und wen der Stetigkeit derselben unmöglich ist. Sey daher der ste dieser Coefficienten, der nicht null ist, R_n, so das erste Glied des obigen Ausdrucks

$$2\omega^n\varrho^n A^{\frac{1}{2}}R_n\cos(V_n - V_0+n\varphi).$$

oll aber dieser Ausdruck für jeden beliebigen Werth r völlig willkürlichen Grösse φ nicht negativ wern, so muss dies sowohl für diejenigen der Fall seyn, e $\cos(V_n - V_0+n\varphi)$ positiv, als für die, welche es gativ machen. Beides zugleich ist nur dann möglh, wenn $A = 0$ ist. Es ist also demnach

$$F(t_1,\ u_1) = A = 0,$$

h. es giebt in der That zwei reelle Werthe von t d u, nämlich t_1, u_1, welche der Gleichung $F(t,u)=0$ nüge leisten, oder, was dasselbe war: es ist nun wirklich

$$\chi(t_1,u_1)=0;\quad \psi(t_1,\ u_1)=0,$$

ler
$$f(t_1+u_1\sqrt{-1})=0,$$

h.
$$x = t_1+u_1\sqrt{-1}$$

ne Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

§. 75.

Dieser analytischen Schlussfolge stellen wir eine geometrischen Beweis gegenüber, der zugleich zu Verdeutlichung mehrerer wesentlichen Puncte des V rigen dienen wird*). Construiren wir nämlich (Fig. 2 durch die rechtwinkligen Coordinaten OP, PQ die i den vorhergehenden §§. mit t und u bezeichnete Grössen, durch den Winkel QOP aber v, folglich i Uebereinstimmung mit den Gleichungen

$$r=\sqrt{t^2+u^2};\ r\cos\ v=t;\ r\sin\ v=u;$$

durch die Hypotenuse $OQ \ldots . r$, so können wir fi jede bestimmten Werthe von t und u die zugehör gen der Functionen $\chi(t,u)$ und $\psi(t,u)$ durch auf d Ebene der t, u im Endpuncte Q von PQ errichtet Senkrechte, wie QM deren eine ist, darstellen. Ve ändern sich nun t und u stetig, so werden die En puncte dieser Senkrechten wegen der Stetigkeit d Functionen χ und ψ auf zwei krummen Flächen liege als deren Gleichungen, wenn z und z' die Wert von MQ im Allgemeinen bezeichnen,

$$z=\chi(t,u); \quad z'=\psi(t,u)$$

zu betrachten sind. Die Gleichungen

$$\chi(t,u)=0, \quad \psi(t,u)=0$$

beziehen sich dann offenbar auf alle diejenigen Punct beider krummen Flächen, für welche $z=0$ ist, d. i. d in der tu-Ebene liegen; oder, was dasselbe, sie drü ken die Durchschnittslinien der beiden Flächen m der tu-Ebene aus. Dass nun jede dieser beiden Gle chungen für sich reelle Wurzeln haben muss, ist leic zu zeigen. Denn da (§. 72)

---

*) Vgl. C. F. Gauss *demonstratio nova theorematis, omnem fu ctionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factor reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Helmstadii* 1799. De selben berühmten Geometers *demonstratio nova altera etc. Gotting* 1816 und *demonstratio tertia. ibid. eod. ao.* würden sich theils weg der Weitläufigkeit des Beweises, theils wegen der dabei gebrauc ten Hülfsmittel hier nicht benutzen lassen.

$$\chi(t,u) = a_0 r^m \cos mv + a_1 r^{m-1} \cos(m-1)v + \ldots + a_{m-1} r \cos v + a_m;$$

$$\psi(t,u) = a_0 r^m \sin mv + a_1 r^{m-1} \sin(m-1)v + \ldots + a_{m-1} r \sin v$$

ar, so hängt (nach §. 20, 5) für ein hinlänglich gros-
es r das Zeichen dieser nach den fallenden Poten-
en von r geordneten Functionen nur von dem ersten
liede, also beziehlich von

$$a_0 r^m \cos mv \quad \text{und} \quad a_0 r^m \sin mv$$

). Durch gehörige Bestimmung von v wird man aber
ir jeden dieser beiden Ausdrücke eine Folge positiver
id eine dergleichen negativer Werthe angeben kön-
en. Da aber beide Functionen als ganze algebrai-
che sich stetig ändern, so wird der Uebergang aus
en positiven Werthen von z in die negativen durch
ull gehen müssen, und da unzählige Werthe von r
ch angeben lassen, bei denen derjenige von z nur
in dem Anfangsgliede abhängt, so ersieht man zu-
eich, dass es eine ganze stetige Folge solcher Wer-
e giebt, für welche $z = 0$ wird.

§. 76.

Die zweite und Hauptfrage ist nun, ob die durch
e Gleichungen

$$\chi(t,u) = 0, \quad \psi(t,u) = 0$$

egebenen Durchschnittscurven der beiden Flächen mit
er tu-Ebene zum wenigsten Ein Paar Werthe t_1, u_1
iben, die beiden zugleich gehören, oder, wie es sich
ich ausdrücken lässt, ob sich die beiden Curven ir-
endwo wirklich schneiden. Analytisch ist diese Frage
i §. 74. dadurch bejahend entschieden, dass gezeigt
irde, die Summe der Quadrate der Functionen χ
id ψ müsse nothwendig einen Nullwerth haben; auf
eometrischem Wege werden wir durch nähere Be-
achtung dieser Curven zu demselben Ergebniss
elangen.

Zuerst nämlich ist leicht zu bemerken, dass jed von beiden $2m$ unendliche Aeste hat. Denn da fi ein ins Unendliche wachsendes r die Gleichungen de Curven beziehlich in

$$a_0 r^m \cos mv = 0 \text{ und } a_0 r^m \sin mv = 0$$

übergehen, so ist klar, dass der ersten von beide durch die Werthe

$$v = \frac{\pi}{2m}, \frac{3\pi}{2m}, \frac{5\pi}{2m}, \ldots\ldots \frac{(4m-1)\pi}{2m};$$

der andern aber durch

$$v = 0, \frac{2\pi}{2m}, \frac{4\pi}{2m}, \ldots\ldots \frac{(4m-2)\pi}{2m}$$

Gnüge geleistet wird, wo π die der halben Peripheri für den Halbmesser 1 entsprechende bekannte Zal ist. Durch diese Werthe ist für jede von beiden Cu ven die Lage von m geraden Linien gegeben, von de nen je zwei auf einander folgende immer den gleiche Winkel $\frac{\pi}{m}$ einschliessen, und alle sich in dem Coo dinatenanfang schneiden. Von der zweiten Curv ist noch überdies zu bemerken, dass sie eigentlic eine complexe, also ihre Gleichung die Zusammer setzung der Gleichungen zweier von einander völli unabhängiger Linien ist. Dies erhellt sowohl au dem nach den Sinussen der Vielfachen von v for schreitenden Ausdruck für $\psi(t,u)$, der unabhängig vo jedem Werthe, den man r geben mag, für $v=0$ un $v=\pi$ immer null wird, als auch, und zwar noch ei facher, aus dem nach den Potenzen von u entwicke ten Ausdrucke für dieselbe Function in §. 73, welch unmittelbar zeigt, dass u gemeinschaftlicher Fact ist und dass also die Gleichung $\psi(t,u)=0$ die beso dere $u=0$ in sich enthält. Auf beiden Wegen ergiel sich, dass die durch $\psi(t,u)=0$ gegebene Linie au einer Curve und einer Geraden, nämlich der t-Ax besteht. Jede von diesen $2m$ Geraden trennt nun au

eiden Seiten ein Paar ins Unendliche laufende Aeste er zugehörigen Curven, deren sich also hiermit eine nzahl von $4m$ ergiebt, von denen $2m$ zu χ und $2m$ zu gehören. Hierbei ist in Beziehung auf die zweite urve ψ, so fern sie als complexe die t-Axe mit entält, diese letztere als ein Paar von Aesten mitzuählen. Fig. 28 stellt diese $2m$ Geraden für eine leichung vom vierten Grade dar; zur leichtern Unerscheidung sind daselbst die der ersten Curve zugeörigen Geraden punctirt gezeichnet.

§. 77.

Denkt man auf diesen Geraden in unendlicher ntfernung vom Coordinatenanfang O Puncte genomen, so kann man von diesen auch den Ausdruck gerauchen, dass sie die Stellen bezeichnen, in welchen ie Curven χ und ψ einen aus O mit dem Halbmesser $=\infty$ beschriebenen Kreis treffen. Es lässt sich aber uch ein aus demselben Mittelpuncte mit einem endchen Halbmesser beschriebener Kreis angeben, desen Umfang in $4m$ Puncten durch Aeste der beiden urven geschnitten wird.

Für $mv=\frac{1}{4}\pi$ nämlich, wo $\cos mv=\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, lässt ich schreiben

$$\chi(t,u)=r^{m-1}\left\{a_0 r\sqrt{\tfrac{1}{2}}+a_1\cos\left(\frac{m-1}{m}\right)\frac{\pi}{4}+\frac{a_2}{r}\cos\left(\frac{m-2}{m}\right)\frac{\pi}{4}+\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{a_{m-1}}{r^{m-2}}\cos\frac{1}{m}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{a_m}{r^{m-1}}\right\}.$$

Wie nun auch hier die Coefficienten a_1, a_2 etc. nd die Werthe der Cosinus nach Grösse und Voreichen beschaffen seyn mögen, so ist doch so viel lar, dass, wenn wir durch S die Summe der ihren bsoluten Werthen nach genommenen Coefficienten a_1, a_2, ... a_m andeuten, und a_0, was gewöhnlich $=1$, positiv annehmen, vorstehender Ausdruck, wenn $r>1$, und also die Quotienten $\frac{a_2}{r}$, $\frac{a_3}{r^2}$ u. s. w. be-

ziehlich kleiner als a_2, a_3 u. s. w., nie grösser se[illegible] kann als

$$r^{m-1}\left(a_0 r\sqrt{\tfrac{1}{2}}+S\right).$$

Nehmen wir nun zugleich $a_0 r\sqrt{\tfrac{1}{2}}>S$, also $r>\frac{S}{a_0}\sqrt{}$ (was die Bedingung $r>1$ mit einschliesst, wen $S>a_0\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, dagegen umgekehrt von dieser mit ei geschlossen wird, wenn $S<a_0\sqrt{\tfrac{1}{2}}$), so wird selb für den ungünstigsten Fall, dass alle Glieder in d obigen Entwickelung von $\chi(t,u)$ vom zweiten Glie an negative Werthe hätten, dennoch der Werth d Inhalts der Parenthese $\{\ \}$ nur positiv seyn könne indem S absolut genommen immer grösser als d Summe der Glieder vom zweiten an und r so bestimn ist, dass $(ra_0\sqrt{\tfrac{1}{2}}+S)$ immer positiv seyn muss *).

Was nun hiermit für $mv=\frac{1}{4}\pi$ bewiesen ist, da wird, da der Cosinus bei 0 seinen grössten Wert erreicht und $\cos mv=\cos(-mv)$, noch mehr für al Werthe von mv zwischen

$$-\frac{\pi}{4} \text{ und } +\frac{\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4} \text{ und } \frac{9\pi}{4};\ \frac{15\pi}{4} \text{ und } \frac{17\pi}{4};\ldots$$
$$\ldots\ \frac{(8k-1)\pi}{4} \text{ und } \frac{(8k+1)\pi}{4}$$

also für alle Werthe von v zwischen

$$-\frac{\pi}{4m} \text{ und } +\frac{\pi}{4m};\ \frac{7\pi}{4m} \text{ und } \frac{9\pi}{4m};\ \frac{15\pi}{4m} \text{ und } \frac{17\pi}{4m};\ldots$$
$$\ldots\ \frac{(8k-1)\pi}{4m} \text{ und } \frac{(8k+1)\pi}{4m}$$

---

*) Einen kleinern Werth von r und für das Nachfolgende enger Grenzen, innerhalb deren Puncte der den Gleichungen $\chi=0$, $\psi=0$ entsprechenden Curven nachweisbar sind, erhält man, wenn ma den Werth $mv=\frac{1}{6}\pi$ einführt, für welchen bekanntlich $\cos mv=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ Dann braucht nur

$$r>\tfrac{2}{3}\frac{S}{a_0}\sqrt{3}$$

genommen zu werden.

wo k Null oder eine ganze positive Zahl nicht grösser als $m-1$ bedeutet, gelten. Bezeichnen wir nun die diesen Werthen von v in dem Umfange eines mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreises entsprechenden Puncte der Reihe nach durch

$(8m-1)$ und (1); (7) und (9); (15) und (17);...
... $(8k-1)$ und $(8k+1)$,

so ergiebt sich der Satz: *dass die durch* $\chi(\mathrm{t},\mathrm{u})$ *gegebene krumme Fläche in einer Entfernung vom Coordinatenanfang, welche durch* $r>1$ *und zugleich* $>\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{a}_0}\sqrt{2}$ *bestimmt ist, zwischen den Puncten*

$(8\mathrm{m}-1)$ *und* (1); (7) *und* (9); (15) *und* (17);...
...$(8\mathrm{k}-1)$ *und* $(8\mathrm{k}+1)$

positive auf der tu-*Ebene senkrechte Coordinaten hat.*

Dagegen wird, weil $\cos mv = -\cos(\pi - mv)$, und aus übrigens gleichen Gründen wie die eben beigebrachten, $\chi(t,u)$ von $v=\frac{3\pi}{4m}$ bis $\frac{5\pi}{4m}$; von $\frac{11\pi}{4m}$ bis $\frac{13\pi}{4m}$... von $\frac{(8k+3)\pi}{4m}$ bis $\frac{(8k+5)\pi}{4m}$ negativ, wenn wir die diesen Werthen von v auf dem Umfange des mit r beschriebenen Kreises mit

(3) und (5); (11) und (13); (19) und (21);...
...$(8k+3)$ und $(8k+5)$

bezeichnen, *die durch* $\chi(\mathrm{t},\mathrm{u})$ *gegebene krumme Fläche in derselben so eben bestimmten Entfernung vom Coordinatenanfang zwischen den Puncten*

(3) *und* (5); (11) *und* (13); (19) *und* (21);...
...$(8\mathrm{k}+3)$ *und* $(8\mathrm{k}+5)$

negative auf der tu-*Ebene senkrechte Ordinaten haben.*

Hieraus folgt nun weiter, vermöge der stetigen Veränderung von $\chi(t,u)$, *dass diese Function für*

Werthe von r, *die* > 1 *und* $> \frac{S}{a_0}\sqrt{2}$ *und für Werthe von v zwischen*

$$\frac{\pi}{4m} \text{ und } \frac{3\pi}{4m};\ \frac{5\pi}{4m} \text{ und } \frac{7\pi}{4m};\ \frac{9\pi}{4m} \text{ und } \frac{11\pi}{4m};\ldots$$

$$\ldots\frac{(4k'+1)\pi}{4m} \text{ und } \frac{(4k'+3)\pi}{4m}$$

(wo k' Null oder eine ganze positive Zahl nicht grösser als $2m-1$) *Nullwerthe, also die durch die Gleichung* $\chi(t,u)=0$ *gegebene Curve in dem Umfange des in der* tu-*Ebene aus dem Coordinatenanfang mit* r *beschriebenen Kreises zwischen den Puncten*

(1) *und* (3); (5) *und* (7); (9) *und* (11);....

... (4k'+1) *und* (4k'+3)

ihr zugehörige Puncte enthält. Die Anzahl dieser Puncte ist offenbar $= 2m$ *).

Ganz auf dieselbe Art lässt sich erweisen: *dass die durch die Gleichung* $\psi(t,u)=0$ *gegebene Curve in dem Umfange ebendesselben in der* tu-*Ebene mit* r *beschriebenen Kreises zwischen den Puncten*

(3) *und* (5); (7) *und* (9); (11) *und* (13);...

...(4k'−1) *und* (4k'+1);

ebenfalls ihr zugehörige Puncte hat. Die Anzahl dieser Puncte ist ebenfalls $= 2m$. Fig. 29 stellt diese durch ungerade Zahlen bezeichneten Puncte für $m=4$ dar. Wir bemerken beiläufig, dass diejenigen Puncte, in welchen die im vorigen §. nachgewiesenen Geraden den Kreisumfang schneiden, zwischen den eben genannten liegen, wie dies auch die Figur angiebt.

§. 78.

Aber die Curven χ und ψ haben zwischen den angegebenen Grenzen nicht blos Puncte auf dem Um-

*) Bei Gauss wird a. a. O. p. 33 noch überdies bewiesen, dass nicht mehr als diese $2m$ Puncte der Curve und dem Kreise gemein seyn können, was hier zu übergehen erlaubt seyn wird.

ange des bezeichneten Kreises, welche auch blos solirte seyn könnten, sondern sie *schneiden* den letzern in denselben. Denn da die Bestimmung des Halbmessers r unzählig viele Werthe desselben zulässt, welche stetig in einander übergehen, und der gegebene Beweis für jeden von diesen gilt, so ist damit eine stetige Folge von Puncten der gegebenen Curven in diesen Kreisen nachgewiesen, und man kann von jeder der erstern sagen, dass sie irgend einen von diesen Kreisumfängen durch ihre $2m$ Aeste zwischen den bemerkten Puncten schneide und in den Kreis eintrete. Aber da diese Curven algebraische sind, mithin überall sich stetig ändern, so können ihre einzelnen Aeste nirgends plötzlich abbrechen. Der in den Kreis eintretende Ast muss also auch irgendwo wieder aus ihm hinausgehen. Stellen wir nun die $2m$ Orte, wo die Aeste der Curve χ in den Kreis eintreten, durch die *ungeraden* Zahlen

$$1, 3, 5, \ldots 4m-1;$$

die $2m$ Orte aber, wo die Aeste der Curve ψ in den Kreis treten, durch die *geraden* Zahlen

$$0, 2, 4, \ldots 4m-2$$

dar, so muss ein mit einer ungeraden Zahl bezeichneter Punct, (oder, wie wir zur Abkürzung sagen können, ein *ungerader Punct*) immer mit einem ungeraden, ein gerader Punct immer mit einem geraden Puncte verbunden seyn. Dies kann nun im Allgemeinen auf sehr vielfältige Weise geschehen; immer aber lässt sich zeigen, dass es unmöglich ist, eine solche Verbindung zweier Puncte der einen Curve herzustellen, ohne zum mindesten Einmal die andere Curve zu durchschneiden.

Gehen wir nämlich von den zu χ gehörigen Puncten 1, 3, 5 u. s. f. aus, so ist zuerst klar, dass, da die t-Axe, welche die Puncte 0 und $2m$ verbindet, zur Curve ψ gehört, der Punct 1 von χ, wenn diese Curve ψ nicht scheiden soll, nur mit einem Puncte,

dessen Nummer kleiner als $2m$, verbunden werden darf. Sey ein solcher daher durch $2m-n$ bezeichnet, so dass also $1 \ldots 2m-n$ eine Verbindung zweier Puncte der Curve χ andeutet; dann wird 2 mit einem Puncte verbunden seyn müssen, dessen Nummer kleiner als $2m-n$ seyn muss, wenn nicht die Linie $1 \ldots 2m-n$ dadurch geschnitten werden soll. Sey also dieser Punct $2m-n_1$, wo $n_1 > n$; so muss nun aus gleichen Gründen wie vorher 3 mit $2m-n_2$, 4 mit $2m-n_3$ etc. wo $n_1 < n_2 < n_3$ u. s. f. ist, verbunden werden. Da man hiernach, je weiter man in der Folge der Puncte 1, 2, 3 u. s. f., in welchen die Aeste eintreten, vorwärts geht, um so weiter von $2m$ aus rückwärts die ihnen entsprechenden Ausgangspuncte zu suchen hat, wenn nicht die nächst vorher gebildete Verbindung zweier Puncte der einen Curve durch die nächstfolgende zweier Puncte der andern geschnitten werden soll, so wird man irgend einmal zu einem Puncte h kommen, der mit $h+2$ zu verbinden ist. Dann aber ist es offenbar, dass der zwischenliegende Punct $h+1$ mit keinem andern verbunden werden kann, ohne diese letzte Verbindungslinie $h \ldots h+2$ zu schneiden. Da nun, der Bezeichnung gemäss, wenn $h \left\{ \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \right.$ $h+1$ zu $\left\{ \begin{matrix} \chi \\ \psi \end{matrix} \right\}$, dagegen h und $h+2$ zur Curve $\left\{ \begin{matrix} \psi \\ \chi \end{matrix} \right.$ gehören, so ist hiermit die Unmöglichkeit des Nichtschneidens der beiden Curven erwiesen. Sie schneiden sich also nothwendig mindestens Einmal irgendwo. Heissen demnach die Coordinaten dieses Durchschnittspunctes t_1, u_1, so wird

$$\chi(t_1, u_1) = 0 \text{ und } \psi(t_1, u_1) = 0$$

folglich auch

$$f(t_1 + u_1 \sqrt{-1}) = 0$$

seyn, also $x = t_1 + u_1 \sqrt{-1}$, eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

Zur besondern Erläuterung des vorstehenden Be-
eises dient noch Fig. 29, welche (vgl. §. 190) für

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 10$$

nstruirt ist, woraus sich

$$\chi(t,u) = u^4 - (6t^2 - 2)u^2 + (t^4 - 2t^2 + 3t + 10);$$

$$\psi(t,u) = 4tu^3 - (4t^3 - 4t + 3)u$$

giebt. Zur leichtern Unterscheidung sind die der
stern Curve zugehörigen Zweige punctirt gezeichnet.
n Raum zu sparen, ist der Kreisdurchmesser nur
9 angenommen, indess die Bestimmung von r in
77 ihn $> 42{,}3$ geben würde. Aus gleichem Grunde
nnte die $f(x)$ darstellende Curve, die in keinem
ncte den beschriebenen Kreis berührt, nicht gezeich-
t werden. Die positiven Abscissen sind hier übri-
ns auf der linken Seite aufgetragen.

§. 79.

Ist nun $x = t_1 + u_1\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Glei-
ung $f(x) = 0$ und daher, nach §. 70, $(x - t_1 - u_1\sqrt{-1})$
Factor der Function $f(x)$, so wird, wenn man
se mit jenem dividirt, eine ganze Function vom
-1)ten Grade erscheinen, die offenbar, aus glei-
en Gründen als $f(x)$, wenigstens Einen Werth von
haben muss, der sie verschwinden macht. Es wird
so diese ganze Function und damit zugleich $f(x)$
lbst einen Factor der Form $(x - t_2 - u_2\sqrt{-1})$, oder die
eichung $f(x) = 0$ eine zweite Wurzel $x = t_2 + u_2\sqrt{-1}$
ben. Auf gleiche Weise wird, nachdem man $f(x)$
t beiden gefundenen Factoren dividirt, eine dritte
urzel $x = t_3 + u_3\sqrt{-1}$ folgen u. s. f., so dass sich
dlich ergiebt, dass

$$f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m =$$
$$= (x - t_1 - u_1\sqrt{-1})(x - t_2 - u_2\sqrt{-1})(x - t_3 - u_3\sqrt{-1})$$
$$\ldots(x - t_m - u_m\sqrt{-1}).$$

ass zu diesen m Factoren nicht noch ein $(m+1)$ter
nzukommen kann, übersieht man augenblicklich, da

dann das Product aller auf den $(m+1)ten$ Grad sti-
gen würde. Denkbar aber wäre es, dass $f(x)$ auh
noch auf eine andere Art in m von den vorliegen
verschiedene Factoren zerlegt werden könnte. G-
setzt nun, diese seyen

$$(x-\alpha_1-\beta_1\sqrt{-1})(x-\alpha_2-\beta_2\sqrt{-1})(x-\alpha_3-\beta_3\sqrt{-\ldots}$$
$$\ldots (x-\alpha_m-\beta_m\sqrt{-\ldots};$$

so muss dies Product dem vorigen gleich seyn. Da
nun jenes verschwindet, wenn einer dieser Factor,
z. B. der erste, null, d. i. wenn $x=t_1+u_1\sqrt{-1}$
wird, so muss die Substitution dieses Werthes auh
das andre Product, d. h. wenigstens einen seiner F-
ctoren verschwinden machen. Sey dies z. B. der F-
ctor $(x-\alpha_3-\beta_3\sqrt{-1})$, so muss also

$$t_1+u_1\sqrt{-1}-\alpha_3-\beta_3\sqrt{-1}=0$$

seyn, was so viel als $t_1=\alpha_3$, $u_1=\beta_3$ bedeutet, u
woraus

$$(x-t_1-u_1\sqrt{-1})=(x-\alpha_3-\beta_3\sqrt{-1})$$

folgt. Die beiden Factorenfolgen, in die, nach d
Annahme, $f(x)$ zerlegbar seyn soll, werden also auh
noch gleich seyn, wenn man die vorstehenden gl-
chen Factoren beiderseits weglässt. Dann aber wi
man auf dieselbe Weise folgern können, dass ein a-
dres Paar Factoren gleich seyn muss, welches a
bei der Vergleichung der Factorenfolgen ebenfa
ausser Acht gelassen werden kann; und so wird si
allmälig die durchgängige Identität der als versch-
den von den Factoren der ersten Folge angenom-
nen Factoren der zweiten Zerlegung ergeben — w-
aus also erhellt, dass $f(x)$ nur auf *eine* Art in m e-
fache Factoren zerlegbar ist.

§. 80.

Nach der Art, wie wir in §. 70 auf den Begri
der imaginären Wurzeln gekommen sind, ist es zwa
unmittelbar klar, dass sie immer paarweise in der Fo

$t+u\sqrt{-1}$ und $t-u\sqrt{-1}$ vorkommen müssen. Auch entspricht dem die daselbst aufgestellte geometrische Ansicht, nach welcher wir sie als verloren gegangene Durchschnitte der parabolischen Curven mit der Abscissenaxe betrachten, welche immer paarweise verloren gehen, da selbst diejenigen einzelnen Puncte, in welchen die Curve die Abscissenaxe nur berührt und in der Nachbarschaft ganz auf Einer Seite derselben liegt, als zusammengerückte Paare von Durchschnitten anzusehen sind.

Indess lässt sich dasselbe Resultat auf noch mehr als eine Art ableiten. Wenn nämlich in §. 72 die Substitution von $x=t_1+u_1\sqrt{-1}$

$$f(t_1+u_1\sqrt{-1})=\chi(t_1,u_1)+\psi(t_1,u_1)\sqrt{-1}$$

ab, so wird $x=t_1-u_1\sqrt{-1}$

$$f(t_1-u_1\sqrt{-1})=\chi(t_1,u_1)-\psi(t_1,u_1)\sqrt{-1}$$

geben. Denn setzen wir

$$x=t_1-u_1\sqrt{-1}=r\,(\cos v-\sin v.\sqrt{-1}),$$

so ist allgemein

$$x^k=r^k(\cos kv-\sin kv.\sqrt{-1}),$$

was sich nur durch das Vorzeichen des zweiten Gliedes von demjenigen Ergebniss unterscheidet, das für $x=t_1+u_1\sqrt{-1}$ erhalten wird. Da nun t_1 und u_1 Werthe sind, welche machen, dass zugleich

$$\chi(t_1,u_1)=0 \quad \text{und} \quad \psi(t_1,u_1)=0,$$

so ist auch die Differenz dieser Functionen, d. i.

$$f(t_1-u_1\sqrt{-1})=0,$$

also $x=t_1-u_1\sqrt{-1}$ eine Wurzel von $f(x)=0$.

Durch eine sehr einfache geometrische, der Construction der Werthe t_1 und u_1 in §. 75 gemässe Betrachtung ergiebt sich dasselbe, wie folgt. Im §. 76 ward erinnert, dass die Gleichung

$$\psi\,(t,u)=0$$

eine complexe ist, indem sie die Gleichung der Geraden $u=0$ enthält. Dagegen ersieht man aus der

nach den Potenzen von u gegebenen Entwickelun dieser, so wie der Function $\chi(t,u)$, dass

$$\chi(t,u) \text{ und } \frac{\psi(t,u)}{u}$$

nur gerade Potenzen von u enthalten. Setzt man nu *diese* Functionen gleich Null, so entsprechen die hier aus entstehenden Gleichungen

$$\chi(t,u)=0 \text{ und } \frac{\psi(t,u)}{u}=0$$

den Curven, von welchen die Coordinatenwerthe ihre Durchschnitte die reellen Grössen t,u in den imaginä ren Wurzeln der Form $t+u\sqrt{-1}$ geben; indem durch Aussonderung der Gleichung $u=0$ die Werthe aus geschlossen sind, die $t+u\sqrt{-1}$ in t übergehen lassen und Durchschnitte mit der Abscissenaxe, d. i. reelle Wurzelwerthe bezeichnen. Da nun die linken Theile obiger beiden Gleichungen, wie erwähnt, nur gerade Potenzen von u enthalten, so wird, wenn t_1, u_1 sie verificiren, dasselbe auch von t_1-u_1 gelten. Werthe, die *ihnen* Gnüge leisten, machen aber auch

$$f(t+u\sqrt{-1})=0,$$

daher also, wenn $t_1+u_1\sqrt{-1}$, auch $t_1-u_1\sqrt{-1}$ eine Wurzel von $f(x)=0$ ist.

Solche zusammengehörige Wurzeln können *conjugirte* oder *gepaarte* heissen. Sie geben die einfachen imaginären Factoren

$$(x-t_1-u_1\sqrt{-1}) \quad \text{und} \quad (x-t_1+u_1\sqrt{-1})$$

und den quadratischen reellen

$$[(x-t_1)^2+u_1^2].$$

§. 81.

Anstatt zu sagen, die ganze algebraische Function $f(x)$ sey immer in m Factoren der Form $(x-t-u\sqrt{-1})$ zerlegbar, die theils reell, theils imaginär seyn können, im letztern Falle aber stets paarweise vorkommen müssen, kann man sich nun auch strenger so

…drücken: *die ganze rationale algebraische Func-…n vom mten Grade*

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_m$$

… immer in reelle Factoren des ersten oder zwei-… Grades zerlegbar. Wie viel Factoren aber vom …sten, wie viel vom zweiten Grade sind, bleibt im …lgemeinen völlig unentschieden und hängt nur von …n besondern Werthen der Constanten der vorgeleg-…n Gleichung ab. Doch lassen sich hierüber wenig-…ens ein paar, wenn auch nur eingeschränkte Be-…rkungen machen.

Ist nämlich 1) m eine *ungerade* Zahl, so muss min-…stens Ein reeller einfacher Factor der Form $x - t_1$ …rhanden seyn, weil sonst die Multiplication von Fac-…ren, die sämmtlich vom zweiten Grade wären, als …chsten Exponenten von x eine gerade Zahl geben …irde. Lassen sich dann von den quadratischen Fac-…ren noch einige, oder auch alle, in einfache reelle …flösen, so wird also die Gesammtzahl der letztern …mer eine ungerade seyn. *Eine Gleichung von ei-…m ungeraden Grade hat demnach immer reelle …Vurzeln in ungerader Anzahl, und zum wenig-…en Eine.*

Ist 2) m eine *gerade* Zahl, so können sämmtliche …actoren unauflösbare quadratische seyn. Lassen sich …ber einige, oder auch alle, in einfache reelle Fac-…ren auflösen, so sind die letzteren immer in gera-…er Anzahl vorhanden. *Eine Gleichung von einem …eraden Grade hat also, wenn sie reelle Wurzeln …esitzt, dieselben immer in gerader Anzahl; es ist …ber möglich, dass sie nicht eine einzige reelle …Vurzel hat.*

Beide Sätze werden leicht durch geometrische …etrachtungen bestätigt. Für ein hinlänglich grosses … wird nämlich das Zeichen von

$$y = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_m$$

nur von dem Anfangsglied x^m abhängen. Substit
ren wir daher einen hinlänglich grossen *positiv*
Werth, so wird zwar y jederzeit *positiv*, substituir
wir aber einen *negativen*, so wird y $\begin{Bmatrix} negativ \\ positiv \end{Bmatrix}$ werden,

nachdem m $\begin{Bmatrix} ungerade \\ gerade \end{Bmatrix}$ ist. Für ein ungerades m ge
also sicher immer y vom Negativen zum Posi
ven über, muss also, da es eine stetige Functi
ist, dazwischen einen Nullwerth haben. Oder, we
man x als Abscisse, y als Ordinate einer Curve a
sieht, so zeigt das Vorstehende, dass für ein unger
des m die Curve Puncte sowohl oberhalb als unte
halb der x-Axe hat, folglich, da sie eine st
tige Curve ist, die x-Axe wenigstens Einmal schne
den muss. Doch kann dies auch 3, 5, 7mal u. s.
geschehen. Ist dagegen m gerade, so ist y sowo
für positive als negative und hinlänglich grosse x p
sitiv. Es kann daher die Curve ganz auf der obe
Seite der Abscissenaxe liegen. Weiss man aber a
andern Umständen, dass sie von dieser geschnitte
werde, so muss dies, da sie zuletzt doch wieder a
die obere Seite zurückkehrt, in einer geraden Anza
von Puncten geschehen.

§. 82.

In §. 71 ff. liess sich nur im Allgemeinen nach
weisen, dass immer eine Wurzel der Form $t_1 + u_1 \sqrt{-}$
vorhanden seyn müsse, die der vollständigen Gle
chung vom $m$ten Grade $f(x) = 0$ Gnüge zu leisten i
Stande sey. Eine Formel oder auch nur eine Me
thode, diese selbst zu finden, konnte aber nicht a
gegeben werden. Wohl aber lässt sich dies auf ein
sehr befriedigende Art für einige *unvollständige* Gle
chungen vom $m$ten Grade leisten. Da wir hierdurc
eine bestätigende bestimmte Thatsache zu jenen al
gemeinen Betrachtungen erhalten, so wird es beleh

nd seyn, sich damit bekannt zu machen. Wir behandeln zuerst die Gleichung

$$x^m + a_m = 0, \text{ oder } x^m = -a_m.$$

tzen wir

$$x = \varrho\,(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}),$$

ergiebt sich

$$x^m = \varrho^m\,(\cos m\varphi + \sin m\varphi . \sqrt{-1}).$$

aber auch

$$x^m = -a_m = -1.\ a_m,$$

ist

$$\varrho^m \cos m\varphi + \varrho^m \sin m\varphi . \sqrt{-1} = -1.\ a_m.$$

ser Gleichung kann nur Gnüge geleistet werden, in man

$$\varrho^m = a_m;\ \cos m\varphi = -1;\ \sin m\varphi = 0$$

zt, wobei a_m als positiv angenommen wird. raus folgt

$$\varrho = a_m^{\frac{1}{m}};\ m\varphi = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots \pm(2k+1)\pi;$$

π die bekannte Zahl 3,1415926... das Verhältniss Durchmessers des Kreises zur Peripherie, und k l oder eine ganze positive Zahl ausdrückt. Es ist er, weil $\cos -\frac{(2k+1)}{m}\pi = \cos\frac{(2k+1)}{m}\pi$ und

$$-\frac{(2k+1)}{m}\pi = -\sin\frac{(2k+1)}{m}\pi,$$

$$x = a_m^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{(2k+1)}{m}\pi \pm \sin\frac{(2k+1)}{m}\pi . \sqrt{-1}\right).$$

Dieser Ausdruck scheint auf den ersten Anblick x unzählige Werthe zu geben, da für k jede auch h so grosse ganze Zahl gewählt werden kann. Ins zeigt sich bald, dass, wenn man über eine gese Gränze hinausgeht, man auf die ersten Werthe ler zurückkommt, wie aus folgender tabellarischen bersicht hervorgeht.

Für $k=0$ wird $x=a_m^{\frac{1}{m}}(\cos\frac{1}{m}\pi \pm \sin\frac{1}{m}\pi.\sqrt{-1})$

$\ldots =1 \ldots . =a_m^{\frac{1}{m}}(\cos\frac{3}{m}\pi \pm \sin\frac{3}{m}\pi.\sqrt{-1})$

$\ldots =2 \ldots . =a_m^{\frac{1}{m}}(\cos\frac{5}{m}\pi \pm \sin\frac{5}{m}\pi.\sqrt{-1})$

. . . .

für $k=m-2$ wird $x=a_m^{\frac{1}{m}}(\cos\left(\frac{2m-3}{m}\right)\pi\pm\sin\left(\frac{2m-3}{m}\right)\pi.\sqrt{\cdot}$

$\ldots=m-1 \ldots . =a_m^{\frac{1}{m}}(\cos\left(\frac{2m-1}{m}\right)\pi\pm\sin\left(\frac{2m-1}{m}\right)\pi.\sqrt{}$

$\ldots=m$ wird $x=a_m^{\frac{1}{m}}(\cos\left(\frac{2m+1}{m}\right)\pi\pm\sin\left(\frac{2m+1}{m}\right)\pi\sqrt{}$

d. i. $a_m^{\frac{1}{m}}(\cos\frac{1}{m}\pi \pm \sin\frac{1}{m}\pi.\sqrt{-1})$.

Es ergiebt also $k=m$ dieselben Wurzeln wie $k=$ eben so $k=m+1$ dieselben wie $k=1$ u. s. f. Hier können wir uns auch völlig allgemein überzeugen: d setzen wir $\frac{2k+1}{m}=2q+\frac{\mu}{m}$, wo q Null oder eine ga positive Zahl (in der vorstehenden Tabelle z. B. N ausser für $k=m$, wo $q=1$) und μ kleiner als m s muss, so ist

$$\cos\left(\frac{2k+1}{m}\right)\pi=\cos\ (2q\pi+\frac{\mu}{m}\pi)=\cos\frac{\mu}{m}\pi;$$

$$\sin\left(\frac{2k+1}{m}\right)\pi=\sin\ (2q\pi+\frac{\mu}{m}\pi)=\sin\frac{\mu}{m}\pi;$$

die Werthe, die sich für $q=1$, 2, 3 u. s. f. erge werden also immer bei gleichen Werthen von μ selben seyn, wie für $q=0$; oder, was dasselbe, Werthe der Cosinus und Sinus, mithin die von x, unabhängig von q.

Gleichwohl könnte es nach der vorstehenden bersicht immer noch scheinen, als habe die Gleich

... Wurzeln, da wegen der doppelten Zeichen zu je... der m Werthe von k zwei Werthe von x gehö... Bei näherer Betrachtung zeigt sich jedoch, dass ... zu $k=0$ und $k=m-1$; $k=1$ und $k=m-2$;.... ...gemein die zu $k=l$ und $k=m-l-1$ gehörigen ...erthe wiederum identisch sind: denn es ist

$$\cos\left(\frac{2m-2l-1}{m}\right)\pi \pm \sin\left(\frac{2m-2l-1}{m}\right)\pi.\sqrt{-1}$$

$$=\cos\left(\frac{2l+1}{m}\right)\pi \mp \sin\left(\frac{2l+1}{m}\right)\pi.\sqrt{-1}.$$

Ist nun m *gerade*, so reduciren sich die m Aus...ücke für x auf $\frac{m}{2}$ Paare von Ausdrücken, die sich ...rch nichts als dadurch unterscheiden, dass in dem ...en da $\pm$ steht, wo der andre $\mp$ hat, deren ein...ne Werthe folglich identisch sind. Ist aber m *un...rade*, so giebt es $\frac{m-1}{2}$ Paare identischer Ausdrü... und einen einzeln vorkommenden mittleren, denje...en nämlich, der zu $k=\frac{m-1}{2}$ gehört. Dieser ...erth ist

$$=-a_m^{\frac{1}{m}};$$

... reell, alle übrigen bleiben imaginär. Die sämmt...en Wurzeln unsrer Gleichung sind also folgende:

1) wenn m *gerade*:

$$x=a_m^{\frac{1}{m}}(\cos\frac{1}{m}\pi \pm \sin\frac{1}{m}\pi.\sqrt{-1});$$

$$x=a_m^{\frac{1}{m}}(\cos\frac{3}{m}\pi \pm \sin\frac{3}{m}\pi.\sqrt{-1});$$

. . . .

$$x=a_m^{\frac{1}{m}}(\cos\left(\frac{m-3}{m}\right)\pi \pm \sin\left(\frac{m-3}{m}\right)\pi.\sqrt{-1});$$

$$x=a_m^{\frac{1}{m}}(\cos\left(\frac{m-1}{m}\right)\pi \pm \sin\left(\frac{m-1}{m}\right)\pi.\sqrt{-1});$$

2) wenn m *ungerade:*

$$x = a_m^{\frac{1}{m}}(\cos\frac{1}{m}\pi \pm \sin\frac{1}{m}\pi.\sqrt{-1});$$

$$x = a_m^{\frac{1}{m}}(\cos\frac{3}{m}\pi \pm \sin\frac{3}{m}\pi.\sqrt{-1});$$

. . . .

$$x = a_m^{\frac{1}{m}}(\cos\left(\frac{m-2}{m}\right)\pi \pm \sin\left(\frac{m-2}{m}\right)\pi.\sqrt{-1}$$

$$x = -a_m^{\frac{1}{m}}.$$

§. 83.

Ist a_m negativ, so ist die aufzulösende Gleichu

$$x^m - a_m = 0, \quad \text{oder} \quad x^m = a_m.$$

Setzen wir wieder $x = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})$, a
$x^m = \varrho^m(\cos m\varphi + \sin m\varphi.\sqrt{-1})$, so folgt

$$\varrho^m = a_m; \quad \cos m\varphi = 1; \quad \sin m\varphi = 0;$$

also

$$\varrho = a_m^{\frac{1}{m}}; \; m\varphi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots \pm 2k\pi;$$

daher

$$x = a_m^{\frac{1}{m}}(\cos\frac{2k\pi}{m} \pm \sin\frac{2k}{m}\pi.\sqrt{-1}),$$

wo k Null oder eine positive ganze Zahl bedeutet, u
wo, aus gleichen Gründen wie im vorigen §., nur
Werthe von k, die nicht grösser als $\frac{m}{2}$ sind, wes
lich verschiedene Ausdrücke für x geen. Es f
det sich

1) wenn m *gerade:*

$$x = a_m^{\frac{1}{m}};$$

$$x = a_m^{\frac{1}{m}}(\cos\frac{2}{m}\pi \pm \sin\frac{2}{m}\pi.\sqrt{-1});$$

$$x = a_m^{\frac{1}{m}} \left(\cos \frac{4}{m}\pi \pm \sin \frac{4}{m}\pi . \sqrt{-1}\right);$$

. . . .

$$x = a_m^{\frac{1}{m}} \left(\cos \left(\frac{m-2}{m}\right)\pi \pm \sin \left(\frac{m-2}{m}\right)\pi . \sqrt{-1}\right);$$

$$x = -a_m^{\frac{1}{m}};$$

so zwei Wurzeln, nämlich die erste und letzte, reell.

2) wenn m *ungerade:*

$$x = a_m^{\frac{1}{m}};$$

$$x = a_m^{\frac{1}{m}} \left(\cos \frac{2}{m}\pi \pm \sin \frac{2}{m}\pi . \sqrt{-1}\right);$$

$$x = a_m^{\frac{1}{m}} \left(\cos \frac{4}{m}\pi \pm \sin \frac{4}{m}\pi . \sqrt{-1}\right);$$

. . . .

$$x = a_m^{\frac{1}{m}} \left(\cos \left(\frac{m-3}{m}\right)\pi \pm \sin \left(\frac{m-3}{m}\right)\pi . \sqrt{-1}\right);$$

$$x = a_m^{\frac{1}{m}} \left(\cos \left(\frac{m-1}{m}\right)\pi \pm \sin \left(\frac{m-1}{m}\right)\pi . \sqrt{-1}\right);$$

er ist also nur die erste reell.

§. 84.

Aus den beiden vorhergehenden §§. folgt nun iter, dass sich der linke Theil der Gleichung

$$x^m + a_m = 0$$

Factoren der Form

$$[x - a_m^{\frac{1}{m}} \cos \left(\frac{2k+1}{m}\right)\pi]^2 + [a_m^{\frac{1}{m}} \sin \left(\frac{2k+1}{m}\right)\pi]^2,$$

er

$$x^2 - 2x a_m^{\frac{1}{m}} \cos \left(\frac{2k+1}{m}\right)\pi + (a_m^{\frac{1}{m}})^2;$$

r linke Theil der Gleichung

$$x^m - a_m = 0$$

in Factoren der Form

$$[x - a_m^{\frac{1}{m}} \cos \frac{2k}{m} \pi]^2 + [a_m^{\frac{1}{m}} \sin \frac{2k}{m} \pi]^2$$

oder

$$x^2 - 2 x a_m^{\frac{1}{m}} \cos \frac{2k}{m} \pi + (a_m^{\frac{1}{m}})^2$$

auflösen lässt. Hieraus ergiebt sich folgende Co

struction. In Fig. 30 und 31 sey $AO = \varrho = a$ der Halbmesser eines Kreises $A\,M_1\,M_2\,M_3\,\ldots$ der Umfang desselben sey in $2m$ (also der halbe Ur fang in m) gleiche Theile getheilt, und A möge d erste, M_1, M_2, M_3, die folgenden Theilpuncte sey Sey nun $PO = x$, und ziehe man von P aus nach a len Theilpuncten die Geraden PA, PM_1, PM_2, PM u. s. f., so ist:

1) wenn m *gerade*,

$$\overline{PO}^m + \overline{AO}^m = \overline{PM}_1^2 \,.\, \overline{PM}_3^2 \,.\, \overline{PM}_5^2 \,\ldots\, \overline{PM}_{m-1}^2;$$
$$\overline{PO}^m - \overline{AO}^m = \overline{PA} \,.\, \overline{PM}_2^2 \,.\, \overline{PM}_4^2 \ldots \overline{PM}_{m-2}^2 \,.\, \overline{PM}_m;$$

wo in beiden Fällen P auf AO selbst, wie in Fig. 3 oder auf dessen Verlängerung, wie in Fig. 31, liege kann, jedoch im letztern Falle zur Linken $\overline{AO}^m - \overline{PM}$ zu setzen ist.

2) wenn m *ungerade*,

$$\overline{PO}^m + \overline{AO}^m = \overline{PM}_1^2 \,.\, \overline{PM}_3^2 \,\ldots\, \overline{PM}_{m-2}^2 \,.\, \overline{PM}_m;$$
$$PO^m - AO^m = \overline{PA} \,.\, \overline{PM}_2^2 \,.\, \overline{PM}_4^2 \,\ldots\, \overline{PM}_{m-1}^2;$$

wo in Beziehung auf die Lage von P dieselbe Beme kung wie bei 1) gilt. Ohne das gerade und ungerad m zu unterscheiden, kann man auch schreiben:

$$\overline{PO}^m + \overline{AO}^m = \overline{PM}_1 \,.\, \overline{PM}_3 \,.\, \overline{PM}_5 \,\ldots\, \overline{PM}_{2m-1};$$
$$\overline{PO}^m - \overline{AO}^m = \overline{PA} \,.\, \overline{PM}_2 \,.\, \overline{PM}_4 \,\ldots\, \overline{PM}^2_{2m-2};$$

o man im ersten Ausdruck nur die ungeraden, im veiten die geraden Theilpuncte berücksichtigt.

Diese geometrische Form der Factorenzerlegung es Ausdrucks $x^m \pm a_m$, in welcher der Satz gleichım als eine Eigenschaft des Kreises (als eine arithetische Betrachtung über Euklides III, 7. u. 8. S.) rscheint, führt den Namen des *Cotesischen Lehrtzes* *). Wir wollen jedoch, zur Bequemlichkeit, ıch den rein analytischen Ausdruck mit diesem Naen belegen.

§. 85.

Es ist leicht, auf diesen Satz die Auflösung der leichung

$$x^{2m} + a_m x^m + a_{2m} = 0$$

rückzuführen. Lösen wir nämlich zuerst diese Gleiıung für x^m auf, so kommt, nach den bekannten egeln,

$$x^m = \frac{-a_m \pm \sqrt{a^2_m - 4a_{2m}}}{2}$$

t nun hier $a_m^2 > 4a_{2m}$, also das Radical reell, so rtritt der Ausdruck zur Rechten die Stelle, die in r Formel $x^m \mp a_m$, $\pm a_m$ einnimmt. Statt $a_m^{\frac{1}{m}}$ ist so allenthalben $\left(\frac{a_m \mp \sqrt{a_m^2 - 4a_{2m}}}{2}\right)^{\frac{1}{m}}$ zu schreiben, nn die Grösse in der Parenthese positiv, dagegen $\left(\frac{-a_m \pm \sqrt{a_m^2 - 4a_{2m}}}{2}\right)^{\frac{1}{m}}$, wenn sie negativ ist.

---

*) Cotes *Harmonia mensurarum. Ed.* Rob. Smith. *Cantabrie*, 1722.

8*

Ist aber $a_m^2 < 4a_{2m}$, so wird

$$x^m = \frac{-a_m \pm \sqrt{4a_{2m} - a_m^2}.\sqrt{-1}}{2}.$$

Setzen wir dann, zur Bequemlichkeit der Rechnung

$$-\frac{a_m}{2} = r\cos v \text{ und } \frac{\sqrt{4a_{2m} - a_m^2}}{2} = r\sin v;$$

also $a_m = -2r\cos v$ und $a_{2m} = r^2$, so wird

$$x^m = r(\cos v \pm \sin v.\sqrt{-1}).$$

Sey nun $\quad x = \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})$,

so folgt $\quad x^m = \varrho^m(\cos m\varphi + \sin m\varphi.\sqrt{-1})$,

woraus $\quad \varrho^m = r;\ \cos m\varphi = \cos v;\ \sin m\varphi = \pm \sin v;$

d. i. $\varrho = r^{\frac{1}{m}}$ und $\varphi = \frac{v \pm 2k\pi}{m}$

folgt, wo k und π die früheren Bedeutungen habe und also

$$x = r^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{v \pm 2k\pi}{m} \pm \sin\frac{v \pm 2k\pi}{m}.\sqrt{-1}\right)$$

wird, welche Formel also die Gleichung

$$x^{2m} - 2x^m r\cos v + r^2 = 0$$

auflöst. Führt man in letzterer ϱ statt r ein, so komm

$$x^{2m} - 2x^m\varrho^m\cos v + \varrho^{2m} = 0,$$

und es ist

$$x = \varrho\left(\cos\frac{v \pm 2k\pi}{m} \pm \sin\frac{v \pm 2k\pi}{m}.\sqrt{-1}\right).$$

Diese Entwickelung setzt a_m positiv voraus. Ist negativ, so wird $a_m = 2r\cos v$, daher

$$\cos m\varphi = -\cos v;\quad \sin m\varphi = \pm\sin v,$$

woraus

$$\varphi = \frac{v \pm (2k+1)\pi}{m},$$

und daher die aufzulösende Gleichung

$$x^{2m}+2x^m\varrho^m\cos v+\varrho^{2m}=0,$$

e Auflösung

$$x=\varrho\left(\cos\frac{v\pm(2k+1)\pi}{m}\pm\sin\frac{v\pm(2k+1)\pi}{m}.\sqrt{-1}\right)$$

'd.

§. 86.

Wie aus der Aehnlichkeit der eben erhaltenen
rmeln mit denen in §. 82 und 83 folgt, beschränkt
h die Zahl der wirklich verschiedenen Werthe auf
:. Sie sind nämlich für die Gleichung

$$x^{2m}-2x^m\varrho^m\cos v+\varrho^{2m}=0$$

1) wenn m *gerade*,

$$x=\varrho\left(\cos\frac{v}{m}\pm\sin\frac{v}{m}.\sqrt{-1}\right);$$

$$x=\varrho\left(\cos\frac{v\pm2\pi}{m}\pm\sin\frac{v\pm2\pi}{m}.\sqrt{-1}\right);$$

. . . .

$$x=\varrho\left(\cos\frac{v\pm(m-2)\pi}{m}\pm\sin\frac{v\pm(m-2)\pi}{m}.\sqrt{-1}\right)$$

$$x=-\varrho\left(\cos\frac{v}{m}\pm\sin\frac{v}{m}.\sqrt{-1}\right).$$

2) wenn m *ungerade*,

$$x=\varrho\left(\cos\frac{v}{m}\pm\sin\frac{v}{m}.\sqrt{-1}\right);$$

$$x=\varrho\left(\cos\frac{v\pm2\pi}{m}\pm\sin\frac{v\pm2\pi}{m}.\sqrt{-1}\right);$$

. . . .

$$x=\varrho\left(\cos\frac{v\pm(m-3)\pi}{m}\pm\sin\frac{v\pm(m-3)\pi}{m}.\sqrt{-1}\right);$$

$$x=\varrho\left(\cos\frac{v\pm(m-1)\pi}{m}\pm\sin\frac{v\pm(m-1)\pi}{m}.\sqrt{-1}\right).$$

ıen so für die Gleichung

$$x^{2m}+2x^m\varrho^m\cos v+\varrho^{2m}=0$$

det sich

1) wenn m *gerade*,

$$x=\varrho(\cos\frac{v\pm\pi}{m}\pm\sin\frac{v\pm\pi}{m}.\sqrt{-1});$$

$$x=\varrho(\cos\frac{v\pm3\pi}{m}\pm\sin\frac{v\pm3\pi}{m}.\sqrt{-1});$$

. . . .

$$x=\varrho(\cos\frac{v\pm(m-3)\pi}{m}\pm\sin\frac{v\pm(m-3)\pi}{m}.\sqrt{-1})$$

$$x=\varrho(\cos\frac{v\pm(m-1)\pi}{m}\pm\sin\frac{v\pm(m-1)\pi}{m}.\sqrt{-1})$$

2) wenn m *ungerade*,

$$x=\varrho(\cos\frac{v\pm\pi}{m}\pm\sin\frac{v\pm\pi}{m}.\sqrt{-1});$$

$$x=\varrho(\cos\frac{v\pm3\pi}{m}\pm\sin\frac{v\pm3\pi}{m}.\sqrt{-1});$$

. . . .

$$x=\varrho(\cos\frac{v\pm(m-2)\pi}{m}\pm\sin\frac{v\pm(m-3)\pi}{m}.\sqrt{-1})$$

$$x=-\varrho(\cos\frac{v}{m}\pm\sin\frac{v}{m}.\sqrt{-1}).$$

§. 87.

Aus diesen Wurzeln ergeben sich nun für bei[de] Formen der Gleichung (die man eine *höhere quadr[a]tische*, so wie die in §. 82 ff. *höhere reine* Gleich[un]gen nennen kann) unmittelbar die Factoren. Für [die] erste nämlich haben sie die Form

$$x^2-2x\varrho\cos\frac{v\pm2k\pi}{m}+\varrho^2;$$

für die andre die Form

$$x^2-2x\varrho\cos\frac{v\pm(2k+1)\pi}{m}+\varrho^2.$$

Für beide Ausdrücke lässt sich eine ähnliche C[on]struction wie für die entsprechenden in §. 84 an[gege]ben. Sey nämlich ein Bogen $AC=v$, oder $AB=$[...] von B aus der Umfang des Kreises in m gleiche The[ile]

theilt, deren Theilpuncte M_1, M_2, M_3 u. s. f. sind;
n nehme $AO = \varrho$, $PO = x$; ziehe die Geraden PB, M_1, PM_2, PM_3 u. s. f., so drücken die Quadrate der
ien nach B und den mit geraden Stellenzahlen von bezeichneten Theilungspuncten die Factoren der
rm $x^2 - 2x\varrho \cos \frac{v+2k\pi}{m} + \varrho^2$; die Quadrate der
ch den Puncten mit ungeraden Stellenzahlen
M gezogenen Linien die Factoren der Form
$-2x\varrho \cos \frac{v+(2k+1)\pi}{m} + \varrho^2$ aus, wie aus den Drei-
ken OPB, OPM_1 u. s. f. leicht zu ersehen. Hier-
sind zu gleicher Zeit auch die untern Werthe
obigen Factoren, nämlich $x^2 - 2x\varrho \cos \frac{v-2k\pi}{m} + \varrho^2$
l $x^2 - 2x\varrho \cos \frac{v-(2k+1)\pi}{m} + \varrho^2$ construirt. Denn
ist

$$\cos \frac{v-2k\pi}{m} = \cos\left(2\pi + \frac{v-2k\pi}{m}\right) = \cos \frac{v+2(m-k)\pi}{m},$$

m nie kleiner als k, also $m-k$ nie negativ. Dem
ch ist also

$$\overline{PO}^{2m} - 2\overline{PO}^m . \overline{AO}^m . \cos \overline{AC} + \overline{AO}^{2m}$$
$$= \overline{PB}^2 . \overline{PM}_2^2 . \overline{PM}_4^2 \ldots . \overline{PM}_{2m-2}^2;$$
$$\overline{PO}^{2m} + 2\overline{PO}^m . \overline{AO}^m . \cos \overline{AC} + \overline{AO}^{2m}$$
$$= \overline{PM}_1^2 . \overline{PM}_3^2 . \overline{PM}_5^2 \ldots . \overline{PM}_{2m-1}^2.$$

Diese Erweiterung des Cotesischen Lehrsatzes dankt man Moivre*), daher diese Gleichungen
Namen des *Moivre'schen Lehrsatzes* führen.

Wird $AC = 0$, so kommt man auf den Fall des tesischen Lehrsatzes zurück, für den m gerade ist
84, 1).

Ob endlich P innerhalb oder ausserhalb des Krei-
liegt, ist völlig gleichgültig.

*) *Miscellanea Analytica, Londini* 1730 *p.* 22.

Fünfter Abschnitt.

Von den allgemeinsten Relationen der Wurzeln.

---

§. 88.

Bezeichnen wir von jetzt an die (reellen od imaginären) Wurzeln der Gleichung

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

kürzer durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, so giebt die Entwick- lung des Products

$$(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_m),$$

welches dem linken Theile der Gleichung gleich i eine Bestimmung der Coefficienten a_1, a_2, a_3 u. s. durch die Wurzeln α_1, α_2, α_3 u. s. f., die, da häufig dem binomischen Lehrsatz zu Grunde gel zu werden pflegt, allerdings als bekannt vorausgese werden könnte*). Sie besteht nämlich in folgen Relationen:

---

*) Man könnte diese Bestimmung den Satz des Vieta nen da dieser in seiner Schrift *de emendatione aequationum p.* 158. *P* 1615 diese Beziehungen wenigstens für positive Wurzeln zuerst merkt zu haben scheint.

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_m),$$
$$a_2 = +(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{m-1}\alpha_m);$$
$$a_3 = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \ldots + \alpha_{m-2}\alpha_{m-1}\alpha_m);$$

s. f.

$$a_{m-1} = (-1)^{m-1}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1} + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m + \ldots + \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_m);$$
$$a_m = (-1)^m(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_m);$$

ie sich durch wirkliche Multiplication von zwei, drei, ier u. s. f. Factoren des Products $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots$ $x-\alpha_m)$ mittels einer Induction, die sich vervollstän-igen lässt, ergeben. Obgleich nun diese Ableitung hne Zweifel die einfachste ist, so lassen wir doch ier noch eine andre auf die Bildung der Derivatio-en gegründete folgen, die zugleich noch eine zweite Beziehung der Coefficienten ergeben wird und ausser-em einige Ausdrücke entwickelt, die wir noch weiter nzuwenden Gelegenheit finden werden.

§. 89.

Aus

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_m)$$

ergiebt sich nämlich nach der Derivationsregel von §. 46

$$\begin{aligned} f'(x) = &(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)\ldots(x-\alpha_m)\\ &+(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)\ldots(x-\alpha_m)\\ &+(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_4)\ldots(x-\alpha_m)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{m-2})(x-\alpha_m)\\ &+(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{m-2})(x-\alpha_{m-1}); \end{aligned}$$

oder, wie wir zur deutlicheren Uebersicht des Bildungsgesetzes schreiben können,

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-\alpha_1} + \frac{f(x)}{x-\alpha_2} + \frac{f(x)}{x-\alpha_3} + \ldots + \frac{f(x)}{x-\alpha_{m-1}} + \frac{f(x)}{x-\alpha_m}.$$

Es ist daher, wenn wir uns der bekannten Termin logie der Combinationen bedienen, $f'(x)$ die Summ der Combinationen ohne Wiederholung zur $(m-1)$te Classe aus den Elementen $(x-\alpha_1)$, $(x-\alpha_2)$, ... $(x-\alpha_m$

Gehen wir von $f'(x)$ zu $f''(x)$ über, so giebt di selbe Regel in §. 46, wenn wir die aus jedem einze nen Gliede der erstern hervorgehenden Glieder imm in Eine Reihe schreiben,

$$f''(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} + \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_m}$$
$$+ \frac{f(x)}{(x-\alpha_2)(x-\alpha_1)} + \frac{f(x)}{(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f(x)}{(x-\alpha_2)(x-\alpha_m}$$
$$+ \frac{f(x)}{(x-\alpha_3)(x-\alpha_1)} + \frac{f(x)}{(x-\alpha_3)(x-\alpha_2)} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f(x)}{(x-\alpha_3)(x-\alpha_m}$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$+ \frac{f(x)}{(x-\alpha_m)(x-\alpha_1)} + \frac{f(x)}{(x-\alpha_m)(x-\alpha_2)} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f(x)}{(x-\alpha_m)(x-\alpha_{m-1}}$$

Offenbar stellen die Nenner dieser Glieder alle mög lichen Combinationen zur zweiten Classe, nebst ihre Versetzungen, aus den Elementen $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$ etc dar; was eine nothwendige Folge der Bildungsweise ist nach der zu jedem der Nenner in dem Ausdruck fü $f'(x)$ jeder andre Factor des Products $f(x)$ der Reih nach hinzukommt. Da nun zwei Elemente 1. 2 ma versetzt werden können, so ist auch, wenn wir jede Glied nur einmal schreiben,

$$\frac{f''(x)}{1.2} = \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} + \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)} + \dots + \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_m)}$$

$$+ \frac{f(x)}{(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)} + \dots + \frac{f(x)}{(x-\alpha_2)(x-\alpha_m)}$$

$$+ \dots\dots\dots$$

$$+ \frac{f(x)}{(x-\alpha_{m-1})(x-\alpha_m)}.$$

ie Nenner dieser Glieder stellen nun alle möglichen ombinationen zur zweiten Classe, die Glieder selbst so alle möglichen Combinationen zur $(m-2)$ten Classe ıs den Elementen $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$ u. s. f. dar. Gehen ir jetzt zu $f'''(x)$ über und legen dabei den ersten, cht reducirten, Ausdruck zum Grunde, so entstehen ıs jedem Gliede $m-2$ neue, indem im Nenner zu en zwei Factoren noch jeder der übrigen, der Reihe ıch, hinzugenommen wird, so dass der Anfang der ntwickelung ist

$$f'''(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)} + \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_4)} + \dots$$

$$+ \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_m)}$$

$$+ \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)(x-\alpha_2)} + \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)} + \dots$$

$$+ \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)(x-\alpha_m)}$$

$$+ \dots\dots\dots\dots$$

Die Nenner sind die Combinationen zur dritten Classe nebst ihren Versetzungen, daher wir, da die Zahl der letztern für jedes Glied $=1.2.3$ ist, werden chreiben können

$$\frac{f'''(x)}{1.2.3} = \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)} + \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_4)} + \ldots + \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_m)}$$

$$+ \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)} + \ldots + \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)(x-\alpha_m)}$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$+ \frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_{m-1})(x-\alpha_m)}$$

$$+ \frac{f(x)}{(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)} + \ldots + \frac{f(x)}{(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_m)}$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$+ \frac{f(x)}{(x-\alpha_2)(x-\alpha_{m-1})(x-\alpha_m)}$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$+ \frac{f(x)}{(x-\alpha_{m-2})(x-\alpha_{m-1})(x-\alpha_m)}$$

Die Nenner dieser Glieder sind nun die blossen Combinationen zur dritten Classe, die Glieder selbst als die Combinationen zur $(m-3)$ten Classe.

Man wird nun aus der Vergleichung von $\frac{f'(x)}{1}$, $\frac{f''(x)}{1.2}$, $\frac{f'''(x)}{1.2.3}$, das Gesetz abstrahiren können, dass allgemein $\frac{f^{(m-2)}(x)}{1.2\ldots(m-2)}$ aus einem Aggregat von Gliedern bestehen wird, welche Brüche sind, deren Zähler $f(x)$ ist, und deren Nenner die sämmtlichen Combinationen zur $(m-2)$ten Classe aus den Elementen $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$ u. s. f. darstellen; oder, was ungleich einfacher ist, die Glieder selbst sind die Combinationen der zweiten Classe, d. h. es ist

$$\frac{f^{(m-2)}(x)}{.2\ldots(m-2)} = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)+(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)+ \ldots+(x-\alpha_1)(x-\alpha_m)$$
$$+(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)+\ldots+(x-\alpha_2)(x-\alpha_m)$$
$$+ \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$+(x-\alpha_{m-1})(x-\alpha_m).$$

Ist dies Gesetz richtig, so muss es auch für $\frac{f^{(m-1)}(x)}{2\ldots(m-1)}$ gelten, d. h. es wird dieser Ausdruck rch das Aggregat der Combinationen der ersten asse, d. i. durch das Aggregat der einzeln genomenen Factoren $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$ u. s. f. selbst darzuellen seyn. Dies ist in der That der Fall: denn hreiben wir

$$\frac{f^{(m-2)}(x)}{2\ldots(m-2)} = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)+(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)+\ldots \\ \qquad +(x-\alpha_1)(x-\alpha_m) \\ +(x-\alpha_2)(x-\alpha_1)+(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)+\ldots \\ \qquad \ldots+(x-\alpha_2)(x-\alpha_m) \\ + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ +(x-\alpha_{m-1})(x-\alpha_1)+(x-\alpha_{m-1})(x-\alpha_2)+\ldots \\ \qquad \ldots+(x-\alpha_{m-1})(x-\alpha_m) \\ +(x-\alpha_m)(x-\alpha_1)+(x-\alpha_m)(x-\alpha_2)+\ldots \\ \qquad \ldots+(x-\alpha_m)(x-\alpha_{m-1})\end{array}\right\},$$

wir also die 1. 2 Versetzungen der Combinationen nzugefügt, dies aber durch den Factor $\frac{1}{2}$ wieder ausglichen haben, so entstehen aus jedem Gliede dies Ausdrucks für $f^{(m-1)}(x)$ zwei Glieder, deren jedes r aus Einem der einzeln genommenen Factoren $-\alpha_1$, $x-\alpha_2$ u. s. f. besteht. Da nun aber jeder ctor in dem vorstehenden Ausdruck $(m-1)$mal als fangsfactor einer Reihe und dann noch als zweiter ctor Einmal in jeder der $(m-1)$ andern Reihen,

also zusammen in diesen ebenfalls noch $(m-1)$m[...] im Ganzen also $2(m-1)$mal, vorkommt, so wird du[...] Derivation das Aggregat

$$\frac{(2m-1)}{2}\left\{(x-\alpha_1)+(x-\alpha_2)+(x-\alpha_3)+\ldots+(x-\alpha_m)\right\}$$

entstehen, oder es wird werden:

$$\frac{f^{(m-1)}(x)}{1.2\ldots(m-1)}=(x-\alpha_1)+(x-\alpha_2)+(x-\alpha_3)+\ldots+(x-\alpha_{[...]}$$

womit sich also das Gesetz bestätigt.

Drücken wir daher die Summe der Combination[...] der 1sten, 2ten, 3ten u. s. f. Classe durch C_1, $C_{[...]}$, C_3 u. s. f. aus, schreiben die Elemente, aus den[...] sie zu bilden sind, in eine dahinter zu setzende K[...] renthese, und verstehen dabei immer, dass die co[...] binirten Elemente in einander zu multipliciren sin[...] so können wir die Resultate dieses Paragraphs ku[...] so zusammenfassen:

$$f(x)=C_m(x-\alpha_1,\ x-\alpha_2\ldots);$$

$$\frac{f'(x)}{1}=C_{m-1}(x-\alpha_1,\ x-\alpha_2,\ \ldots);$$

$$\frac{f''(x)}{1.\ 2}=C_{m-2}(x-\alpha_1,\ x-\alpha_2\ldots);$$

$$\frac{f'''(x)}{1.\ 2.\ 3}=C_{m-3}(x-\alpha_1,\ x-\alpha_2,\ldots);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{f^{(m-2)}(x)}{1.2\ldots(m-2)}=C_2(x-\alpha_1,\ x-\alpha_2,\ldots);$$

$$\frac{f^{(m-1)}(x)}{1.\ 2\ldots(m-1)}=C_1(x-\alpha_1,\ x-\alpha_2,\ldots).$$

Für $f^{(m)}(x)$ ergiebt sich $\frac{f^{(m)}(x)}{1.\ 2\ldots m}=1$, was all[...] dings auch als $C_0(x-\alpha_1,\ x-\alpha_2\ \ldots)$ betrachtet w[...] den kann.

§. 90.

Für dieselben Functionen können wir aber au[...]

eitens auf viel einfachere Weise eine andere Reihe n Ausdrücken erhalten, indem wir auf

$$f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

ursprüngliche Regel der Derivation in §. 32 an- nden. Dann kommt

$$f'(x) = m x^{m-1} + (m-1) a_1 x^{m-2} + (m-2) a_2 x^{m-3} + \ldots + 1 . a_{m-1},$$

$$f''(x) = m(m-1) x^{m-2} + (m-1)(m-2) a_1 x^{m-3} + \ldots + 3.2 a_{m-3} x + 2.1 a_{m-2};$$

$$f'''(x) = m(m-1)(m-2) x^{m-3} + \ldots + 4.3.2. a_{m-4} x + 3.2.1. a_{m-3};$$

s. f.

$$f^{(m-1)}(x) = m(m-1) \ldots 3.2. x + (m-1)(m-2) \ldots 2.1. a_1;$$

$$f^{(m)}(x) = m(m-1) \ldots 3.2.1.$$

tzen wir in diesen abgeleiteten Functionen — na- lich jedoch mit Ausschluss der letzten, die x nicht hält —, so wie in der ursprünglichen selbst, $x=0$, bleibt in den Ausdrücken zur Rechten immer nur letzte Glied stehen, und es ergiebt sich

$$a_m = f(0); \; a_{m-1} = \frac{f'(0)}{1}; \; a_{m-2} = \frac{f''(0)}{1.2};$$

$$_{-3} = \frac{f'''(0)}{1.2.3}; \ldots a_2 = \frac{f^{(m-2)}(0)}{1.2 \ldots (m-2)}; \; a_1 = \frac{f^{(m-1)}(0)}{1.2 \ldots (m-1)};$$

$f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ u. s. f. bezeichnen, dass *nach* dung der *allgemeinen* Functionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ s. f. $x=0$ zu setzen ist. Wird nun aber dieselbe stitution auch in die Ausdrücke des vorhergehen- §§. eingeführt, so ergeben sich folgende Formeln:

$$(0) = (-1)^m (\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \ldots . \alpha_m);$$

$$\frac{'(0)}{1} = (-1)^{m-1} (\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_m + \alpha_1 \alpha_3 \ldots \alpha_m + \ldots + \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{m-1});$$

$$\frac{''(0)}{1.2} = (-1)^{m-2} (\alpha_3 \alpha_4 \ldots \alpha_m + \alpha_2 \alpha_4 \ldots \alpha_m + \ldots + \alpha_1 \alpha_4 \ldots \alpha_m + \ldots + \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{m-2});$$

$$\frac{f'''(0)}{1.2.3} = (-1)^{m-3}(\alpha_4\alpha_5\ldots\alpha_m + \alpha_3\alpha_5\ldots\alpha_m + \ldots$$
$$+ \alpha_1\alpha_5\ldots\alpha_m + \ldots + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-}$$

u. s. f.

$$\frac{f^{(m-2)}(0)}{1.2\ldots(m-2)} = +(\alpha_{m-1}\alpha_m + \alpha_{m-2}\alpha_m + \ldots + \alpha_1\alpha_m + \ldots + \alpha_1\alpha$$

$$\frac{f^{(m-1)}(0)}{1.2\ldots(m-1)} = -(\alpha_m + \alpha_{m-1} + \ldots + \alpha_2 + \alpha_1).$$

Setzen wir nun diese doppelten Ausdrücke für di besondern Werthe der successiven Derivationen e ander gleich, so ergeben sich — nur in umgekehr Anordnung — die in §. 88 aufgeführten bekann Relationen der Coefficienten zu den Wurzeln.

§. 91.

Mit Hülfe dieser Relationen können wir die I ziehung der Derivationen zur Function noch unter nem andern Gesichtspuncte als dem bisherigen a fassen.

Setzen wir die Derivation

$$mx^{m-1} + (m-1)a_1 x^{m-2} + \ldots + 1.a_{m-1} = 0,$$

und dividiren mit m, so ergiebt sich, wenn wir Abkürzung

$$\frac{m-1}{m}a_1 = a'_1;\ \frac{m-2}{m}a_2 = a'_2;\ldots \frac{2}{m}a_{m-1} = a'_{m-}$$

setzen,

$$x^{m-1} + a'_1 x^{m-2} + a'_2 x^{m-3} + \ldots + a'_{m-1} = 0.$$

Substituiren wir nun für $a_1, a_2, \ldots a_{m-1}$ ihre im v hergehenden §. gefundenen Werthe, nennen die W zeln der derivirten Gleichung $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_{m-1}$, u stellen durch sie ebenfalls nach dem vorhergehen §. $a'_1, a'_2, \ldots a'_{m-1}$ dar, so ergiebt sich

$$\frac{\alpha'_1 + \alpha'_2 + \ldots \alpha'_{m-1}}{m-1} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_m}{m}$$

$$\frac{\alpha'_1\alpha'_2+\alpha'_1\alpha'_3+\ldots+\alpha'_2\alpha'_3+\ldots+\alpha'_{m-2}\alpha'_{m-1}}{m-2}=$$

$$=\frac{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{m-1}\alpha_m}{m};$$

er, wenn man beiderseits mit $\frac{1}{2}(m-1)$ dividirt:

$$\frac{\alpha'_1\alpha'_2+\alpha'_1\alpha'_3+\ldots+\alpha'_2\alpha'_3+\ldots+\alpha'_{m-2}\alpha'_{m-1}}{\frac{1}{2}(m-1)(m-2)}=$$

$$=\frac{\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{m-1}\alpha_m}{\frac{1}{2}m(m-2)}.$$

rner, durch dieselbe Vergleichung und Division mit $m-1)(m-2)$:

$$\frac{_1\alpha'_2\alpha'_3+\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_4+\ldots+\alpha'_2\alpha'_3\alpha'_4+\ldots+\alpha'_{m-3}\alpha'_{m-2}\alpha'_{m-1}}{\frac{1}{6}(m-1)(m-2)(m-3)}=$$

$$=\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\ldots+\alpha_{m-2}\alpha_{m-1}\alpha_m}{\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)};$$

s. f.; d. h. *die arithmetischen Mittel sowohl zwi- ıen den einfachen Wurzeln der derivirten Glei- ung als auch zwischen deren Producten zu zweien, eien u. s. f. sind beziehungsweise den arithmeti- ıen Mitteln aus den Wurzeln der ursprünglichen 'eichung und deren Producten zu zwei, drei u. f. Factoren gleich.*

Geht man von der ersten Derivation zu den folgen- ı über, so zeigt sich leicht, dass das arithmetische ttel aus den Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ ich der Wurzel der Gleichung $f^{(m-1)}(x)=0$; das ttel aus den binären Producten der Wurzeln der eichung $f(x)=0$ gleich dem Producte der Wurzeln Gleichung $f^{(m-2)}(x)=0$; das Mittel aus den ter- en Producten der Wurzeln von $f(x)=0$, dem oducte der Wurzeln von $f^{(m-3)}(x)=0$ gleich ist, s. f.

§. 92.

Die in §. 89 gefundenen Ausdrücke für die De- ationen geben uns nun zu weitern Betrachtungen

Stoff. Wenn die Substitution eines der Werthe α
α_2, $\alpha_3 \ldots \alpha_m$ für x in

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ (x-\alpha_3)\ldots\ (x-\alpha_m)$$

dieses Product verschwinden macht, so verschwin
dagegen, so lange alle Wurzeln von einander v
schieden sind, weder $f'(x)$ noch eine der folgend
Derivationen, indem zum wenigsten immer ein Gli
in den diesen Functionen gleichen Aggregaten v
Producten vorhanden ist, welches keinen Factor h
in dem die substituirte Wurzel vorkommt. Sind
gegen zwei dieser Wurzeln gleich, z. B. $\alpha_1=\alpha_2$,
verschwindet mit $f(x)$ zugleich $f'(x)$, wenn $x=\alpha_1=$
gesetzt wird, dagegen keine der folgenden Derivat
nen. Damit $f''(x)$ verschwinde, ist es nöthig, d
drei Wurzeln gleich werden; soll noch $f'''(x)$ v
schwinden, so ist die Gleichheit von vier Wurzeln
forderlich u. s. f.; allgemein: *soll die Substituti*
eines Wurzelwerthes der Gleichung $f(x)=0$ *nic*
blos $f(x)$, *sondern auch die nächsten* n *Derivation*
$f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x) \ldots f^{(n)}(x)$ *verschwinden mach*
so muss die Gleichung $f(x)=0$, $n+1$ *gleiche Wu*
zeln haben. In diesem Falle werden diese Function
also folgende Formen haben, worin α die gleic
Wurzel bedeutet,

$$f(x)=(x-\alpha)^{n+1}X;\ f'(x)=(x-\alpha)^n X_1;$$
$$f''(x)=(x-\alpha)^{n-1}X$$
$$f'''(x)=(x-\alpha)^{n-2}X_3;\ \ldots\ldots\ f^{(n)}(x)=(x-\alpha)X$$

wo X, X_1, X_2, ... X_n Functionen bezeichnen,
den Factor $x-\alpha$ nicht weiter enthalten.

Hieraus ergiebt sich ein Kennzeichen, *um zu u*
tersuchen, ob eine vorgelegte Gleichung eine od
mehrere gleiche Wurzeln hat. Man bildet nä
lich zu ihrem linken Theil die Derivation u
untersucht, ob beide einen gemeinschaftlich
Theiler haben. Dieser wird sich immer auf d
Form $(x-\alpha)^n$ *bringen lassen und die Menge d*

inheiten in n+1 *anzeigen, wie vielmal die gleiche 'urzel* a *in der gegebenen Gleichung enthalten ist.*

Um ein Beispiel der Anwendung dieser Regel zu ben, sey

$$f(x)=x^4-4x^3+2x^2+4x-3=0,$$

ergiebt sich

$$f'(x)=4x^3-12x^2+4x+4.$$

Bei der Aufsuchung des gemeinschaftlichen Thei- s kann der in allen Gliedern von $f'(x)$ enthaltene ictor 4 unberücksichtigt bleiben. Die Division von x) durch $\frac{f'(x)}{4}$ giebt dann zum Quotienten $x-1$ und m Rest $-2x^2+4x-2$, womit also in $\frac{f'(x)}{4}$ zu di- diren ist, welcher jedoch, nach bekannten Regeln, vor durch Division mit -2 in x^2-2x+1 verein- cht werden kann. Die Division giebt dann zum uotienten $x-1$, zum Rest $-2x+2$, mit dem man, enn er durch Division mit -2 in $x-1$ vereinfacht , aus x^2-2x+1 den Quotienten $x-1$ ohne Rest hält. Es ist also $x-1$ der gemeinschaftliche Thei- r zwischen $f(x)$ und $f'(x)$ und es hat also $f(x)=0$ e *zwei* gleichen Wurzeln 1 oder den Factor $-1)^2$. In der That wird nicht nur der Ausdruck $-4x^3+2x^2+4x-3$, sondern auch der durch Di- sion mit $x-1$ aus demselben erhaltene x^3-3x^2-x+3, r $x=1$, null. Wäre gegeben $x^4-6x^2+8x-3=0$, findet man auf dieselbe Weise, dass die Wurzel dreimal in ihr enthalten ist*).

Nach §. 64 wird sich der Fall der gleichen Wur- ln auch geometrisch kenntlich machen. Da nämlich, enn zwei, drei u. s. f. Wurzeln einer Gleichung aus r Ungleichheit in die Gleichheit übergehen, die ih-

*) Der Erfinder des Wesentlichen dieser Regel ist Johann udde von Amsterdam. S. dessen *Epistola prima de reductione quationum. Regula X.* in Descartes *Geometria ed.* Schooten. *nstel.* 1683. *p.* 433. Hieraus ist das zweite der obigen Beispiele tnommen.

nen entsprechenden verschiedenen Durchschnittspunc
der Curve mit der Abscissenaxe sich in einem ein-
gen Puncte vereinigen, so wird dieser Punct, je nac-
dem die Zahl der gleichen Wurzeln gerade oder u-
gerade ist, sich als ein gemeiner Berührungspunct
oder als ein Wendepunct darstellen, in beiden Fäll
aber die Berührende mit der Abscissenaxe zusamme-
fallen. Dies ergiebt sich auch daraus, dass, w
bei zwei, drei u. s. f. gleichen Wurzeln die ursprün-
liche beziehlich mit der ersten, zweiten u. s. f. abg-
leiteten Function einen einfachen Factor gemein ha
die Stammgleichung und eine Zahl derivirter Gl-
chungen für einen und denselben Werth null werde,
was nach §. 64, je nachdem die Zahl der verschwi-
denden Derivationen ungerade oder gerade, das Ken-
zeichen eines einfachen Berührungspunctes oder ein
Wendepunctes ist.

§. 93.

Eine zweite Benutzung der Formeln des §.
ist folgende. Es fand sich daselbst

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-\alpha_1} + \frac{f(x)}{x-\alpha_2} + \frac{f(x)}{x-\alpha_3} + \ldots + \frac{f(x)}{x-\alpha_m}.$$

Entwickeln wir jedes dieser Glieder wirklich -
durch Division, oder die Methode der unbestimmte
Coefficienten, oder Betrachtung der Factoren, aus d
nen sie zusammengesetzt sind —, so ergiebt sich

$$\frac{f(x)}{x-\alpha_1} = x^{m-1} + (a_1+\alpha_1)\,x^{m-2} + (a_2+a_1\alpha_1+\alpha^2_1)x^{m-3}$$

$$+ (a_3+a_2\alpha_1+a_1\alpha^2_1+\alpha^3_1)x^{m-4} + \ldots$$

$$+ (a_{m-1}+a_{m-2}\alpha_1+a_{m-3}\alpha^2_1+\ldots+\alpha_1{}^{m-1}$$

$$\frac{f(x)}{x-\alpha_2} = x^{m-1} + (a_1+\alpha_2)\,x^{m-2} + (a_2+a_1\alpha_2+\alpha^2_2)x^{m-3} + .$$

$$+ (a_{m-1}+a_{m-2}\alpha_2+\ldots+\alpha_2{}^{m-1}$$

$$\frac{f(x)}{x-\alpha_3} = x^{m-1} + (a_1+\alpha_3)\,x^{m-2} + (a_2+a_1\alpha_3+\alpha^2_3)x^{m-3} + .$$

$$+ (a_{m-1}+a_{m-2}\alpha_3+\ldots\alpha_3{}^{m-1}); \quad \text{u. s.}$$

$$\frac{(x)}{-\alpha_m} = x^{m-1} + (a_1 + \alpha_m)\, x^{m-2} + (a_2 + a_1\alpha_m + \alpha_m^2)\, x^{m-3} +$$
$$\ldots + (a_{m-1} + a_{m-2}\alpha_m + \ldots + \alpha_m^{m-1}).$$

dirt man diese Entwickelungen und bezeichnet, zur kürzung, die in der Summe vorkommenden Sumn der ersten, zweiten, dritten u. s. f. Potenzen der nmtlichen Wurzeln beziehlich durch S_1, S_2, S_3 s. f., so ergiebt sich

$$(x) = mx^{m-1} + (ma_1 + S_1)x^{m-2} + (ma_2 + a_1S_1 + S_2)x^{m-3}$$
$$+ (ma_3 + a_2S_1 + a_1S_2 + S_3)x^{m-4} + \ldots$$
$$+ (ma_{m-1} + a_{m-2}S_1 + \ldots + a_1S_{m-2} + S_{m-1}).$$

n aber giebt die unmittelbare Bildung der Derivation

$$f'(x) = mx^{m-1} + (m-1)a_1x^{m-2} + (m-2)a_2x^{m-3}$$
$$+ (m-3)\, a_3x^{m-4} + \ldots + a_{m-1}.$$

tzt man daher beide Ausdrücke einander gleich, folgt

$$S_1 + a_1 = 0;$$
$$S_2 + a_1S_1 + 2a_2 = 0;$$
$$S_3 + a_1S_2 + a_2S_1 + 3a_3 = 0;$$
u. s. f.
$$S_{m-1} + a_1S_{m-2} + \ldots + a_{m-2}S_1 + (m-1)a_{m-1} = 0;$$

usdrücke, deren Gesetz evident ist.

Wenn man die hieraus successiv erhaltenen Werte von S_1, S_2, S_3 u. s. f. immer in der nächstfolenden Gleichung substituirt, so erhält man

$$S_1 = -a_1;$$
$$S_2 = +2\left\{\frac{a_1a_1}{2} - \frac{a_2}{1}\right\};$$
$$S_3 = -3\left\{\frac{a_1a_1a_1}{3} - \frac{2a_1a_2}{2} + \frac{a_3}{1}\right\};$$
$$S_4 = +4\left\{\frac{a_1a_1a_1a_1}{4} - \frac{3a_1a_1a_2}{3} + \left(\frac{2a_1a_3 + a_2a_2}{2}\right) - \frac{a_4}{1}\right\};$$

$$S_5 = -5\left\{\frac{a_1 a_1 a_1 a_1 a_1}{5} - \frac{4a_1 a_1 a_1 a_2}{4} + \left(\frac{3a_1 a_1 a_3 + 3a_1 a_2 a_2}{3}\right) - \left(\frac{2a_1 a_4 + 2a_2 a_3}{2}\right) + \frac{a_5}{1}\right\}$$

u. s. f.

Die Vorzeichen vor diesen Ausdrücken, so wie vor den einzelnen Gliedern derselben, wie sie hier zusammengefasst sind, wechseln regelmässig ab; die Nenner der Glieder, deren Anzahl immer der Stellenzahl von S gleich ist, nehmen von dieser bis zur Einheit immer um eine Einheit allmälig ab. Die Bildungsweise der Glieder selbst ist combinatorisch, indem sie alle Classen von Combinationen zur Summe, welche die Stellenzahl von S angiebt, darstellen, die Zahlencoefficienten aber die Versetzungszahlen der in der nachfolgenden Combination enthaltenen Elemente angeben. So sind z. B. in S_4, $a_1 a_1 a_1 a_1$, $a_1 a_1 a_2$, [illegible] Combinationen der Classen 4 und 3 zur Summe 4, der Coefficient 3 vor $a_1 a_1 a_2$ ist die Zahl, die angiebt, wie vielmal diese drei Elemente sich versetzen lassen, u. s. f.*)

§. 94.

Die Herleitung der im vorhergehenden §. gewonnenen merkwürdigen Relation zwischen den Coefficienten der vorgelegten Gleichung und den Potenzen der Wurzeln, welche wir in der ersten recurrirenden Form allgemein durch

$$S_n + a_1 S_{n-1} + a_2 S_{n-2} + \ldots + a_{n-1} S_1 + n a_n = 0$$

darstellen können, ist von der Beschaffenheit, dass sie die Gültigkeit dieser Beziehung nur für Potenzen

---

*) Diese Relationen führen in der recurrirenden Form auch den Namen des *Newtonischen Satzes*, da sie Newton, wie es scheint, zuerst, wiewohl ohne Beweis, erwähnt hat. (S. *Arithm. universal.* *II. cap. III. nr. VIII. ed. Castill. T. II. p.* 55.) Die independenten Formeln hat aber weit früher schon Albert Girard in s. *invention nouvelle en l'Algèbre etc. Amsterd.* 1629 angegeben, vgl. Klügel's mathem. Wörterbuch. I. S. 57.

r Wurzeln, die kleiner als der Grad der Gleichung, so für Werthe von $n < m$ erweist. Es lässt sich eselbe jedoch leicht auf Werthe, die gleich und össer als m sind, ausdehnen. In der ersteren Hinsicht braucht nur bemerkt zu werden, dass, wenn man e Gleichungen

$$f(\alpha_1) = \alpha_1^m + a_1\alpha_1^{m-1} + a_2\alpha_1^{m-2} + \ldots + a_{m-1}\alpha_1 + a_m = 0;$$

$$f(\alpha_2) = \alpha_2^m + a_1\alpha_2^{m-1} + a_2\alpha_2^{m-2} + \ldots + a_{m-1}\alpha_2 + a_m = 0;$$

u. s. f.

$$f(\alpha_m) = \alpha_m^m + a_1\alpha_m^{m-1} + a_2\alpha_m^{m-2} + \ldots + a_{m-1}\alpha_m + a_m = 0$$

ldirt, sogleich

$$S_m + a_1 S_{m-1} + a_2 S_{m-2} + \ldots + a_{m-1}S_1 + ma_m = 0$$

ervorgeht. In Beziehung auf die Werthe von n aber, e grösser als m, multipliciren wir zuvörderst die leichung $f(x) = 0$ mit x^μ, wo μ eine beliebige ganze ositive Zahl, so wird die Function $x^\mu f(x)$ auch noch urch Substitution der Wurzeln α_1, α_2 u. s. f. null erden. Man erhält aber dann folgende Gleichungen:

$$\alpha_1^{m+\mu} + a_1\alpha_1^{m+\mu-1} + a_2\alpha_1^{m+\mu-2} + \ldots$$
$$\ldots + a_{m-1}\alpha_1^{\mu+1} + a_m\alpha_1^\mu = 0;$$

$$\alpha_2^{m+\mu} + a_1\alpha_2^{m+\mu-1} + a_2\alpha_2^{m+\mu-2} + \ldots$$
$$\ldots + a_{m-1}\alpha_2^{\mu+1} + a_m\alpha_2^\mu = 0;$$

u. s. f.

$$\alpha_m^{m+\mu} + a_1\alpha_m^{m+\mu-1} + a_2\alpha_m^{m+\mu-2} + \ldots$$
$$\ldots + a_{m-1}\alpha_m^{\mu+1} + a_m\alpha_m^\mu = 0;$$

eren Summe ist:

$$S_{m+\mu} + a_1 S_{m+\mu-1} + a_2 S_{m+\mu-2} + \ldots$$
$$\ldots + a_{m-1} S_{\mu+1} + a_m S_\mu = 0,$$

der, wenn wir $m + \mu = n$ setzen:

$$S_n + a_1 S_{n-1} + a_2 S_{n-2} + \ldots + a_{m-1} S_{n-m+1} + a_m S_{n-m} = 0,$$

velche Formel also für jedes $n > m$ gilt.

§. 95.

Auch für die negativen ganzen Potenzen der Wu-zeln können wir ähnliche Formeln aufstellen. Mul-pliciren wir nämlich $f(x)=0$ mit $x^{-\mu}$, substituire, nachdem dies geschehen, wieder die Wurzeln α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_m$ und addiren die so entstehenden m Gl-chungen, so ergiebt sich, was auch schon durch blos Vertauschung des μ im vorigen §. mit $-\mu$ hervorgel,

$$S_{m-\mu}+a_1 S_{m-\mu-1}+\ldots+a_{m-1} S_{-\mu+1}+a_m S_{-\mu}=0.$$

So lange $\mu<m$, zeigt das erste, und wenn zuglei $\mu<m-1$, $<m-2$ u. s. f., auch das zweite, drit u. s. f. Glied positive Potenzen der Wurzeln an. I aber die Gleichung mit $a_m S_{-\mu}$, d. h. mit einem Au druck, der entschieden negative Potenzen der Wu zeln enthält, schliesst, so muss bei irgend eine Gliede der Uebergang aus den positiven in die neg tiven Potenzen stattfinden. Dieses Glied wird dasjeni seyn, welches $S_0=m$ enthält, d. i., da, wie man sie die Summe der Stellenzahlen von a und S consta nämlich immer $=m-\mu$, das Glied $+ma_{m-\mu}$. Hierdur zerfällt der linke Theil der obigen Gleichung in zw Theile, von denen der erste nur positive, der and nur negative Potenzen der Wurzeln enthält. Sie si

$$S_{m-\mu}+a_1 S_{m-\mu-1}+\ldots+a_{m-\mu-1} S_1+ma_{m-\mu};$$

und

$$\mu a_{m-\mu}+a_{m-\mu+1}S_{-1}+a_{m-\mu+2}S_{-2}+\ldots+a_{m-1}S_{-\mu+1}+a_m S_{-\mu}$$

Nun aber ist der erste Theil, nach §. 93, offenb $=0$, folglich ist auch für sich der zweite null; ode wenn wir der Gleichförmigkeit wegen ihn in umgekeh ter Ordnung schreiben und μ mit n vertauschen, so i

$$a_m S_{-n}+a_{m-1}S_{-n+1}+\ldots+a_{m-n+2}S_{-2}+a_{m-n+1}S_{-1}+na_{m-n}=$$

woraus, wenn wir, zur deutlicheren Uebersicht de Gesetzes, successiv $n=1, 2, 3,\ldots$ setzen, sich e giebt

$$a_m S_{-1} + a_{m-1} = 0;$$
$$a_m S_{-2} + a_{m-1} S_{-1} + 2a_{m-2} = 0;$$
$$a_m S_{-3} + a_{m-1} S_{-2} + a_{m-2} S_{-1} + 3a_{m-3} = 0;$$

s. f.

Es ist sehr leicht, aus diesen Formeln indepen-
nte zu erhalten, was am bequemsten geschehen
nn, wenn man in den independenten Formeln des
93 statt a_1, a_2, a_3 u. s. f. beziehlich $\frac{a_{m-1}}{a_m}$, $\frac{a_{m-2}}{a_m}$,
u. s. f. schreibt, was sich aus der Vergleichung
r recurrirenden Formeln für die positiven und für
e negativen Potenzen der Wurzeln sogleich recht-
rtigt.

Zur Erläuterung der in diesem und den beiden
rhergehenden §§. enthaltenen Relationen wählen
r die Gleichung

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0,$$

ren Wurzeln $\alpha_1 = -5$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$, $\alpha_4 = 4$ sind
nd in welcher $a_1 = -4$; $a_2 = -19$; $a_3 = 106$;
$= -120$. In der That findet sich

$$S_1 = -5+2+3+4 = 4 = -(-4);$$
$$S_2 = 25+4+9+16 = 54 = -(-4).4 - (-19).2,$$
$$S_3 = -125+8+27+64 = -26$$
$$= -(-4).54 - (-19).4 - 106.3;$$
$$S_4 = 625+16+81+256 = 978$$
$$= -(-4)(-26) - (-19).54 - 106.4 - (-120).4;$$
$$S_5 = -3125+32+243+1024 = -1826$$
$$= -(-4)(978) - (-19)(-26) - 106.54 - (-120).4;$$

s. w. Ebenso

$$S_{-1} = \frac{-1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{53}{60} = \frac{-106}{(-120)};$$
$$S_{-2} = \frac{1}{25} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{1669}{3600} = \frac{-(106).53}{(-120).60} - \frac{2(-19)}{(-120)};$$

s. w.

§. 96.

Wir fügen diesen Sätzen über die Potenzensummen der Wurzeln noch einige Bemerkungen bei:

1) Die Relationen zwischen den Coefficienten und den Potenzensummen können auch umgekehrt werden. Man wird dann aus §. 93 erhalten

$$a_1 = - S_1;$$
$$a_2 = - \frac{a_1 S_1 + S_2}{2};$$
$$a_3 = - \frac{a_2 S_1 + a_1 S_2 + S_3}{3};$$
$$a_4 = - \frac{a_3 S_1 + a_2 S_2 + a_1 S_3 + S_4}{4};$$

u. s. w.,

woraus auch independente Ausdrücke durch Substitution entwickelt werden können, die jedoch ein, nicht bequem zu übersehendes, Gesetz befolgen.

2) Sind unter den Wurzeln imaginäre, so gelten die Relationen nichts desto weniger, wie für reelle Wurzeln; denn stellen wir ein solches Paar imaginärer Wurzeln durch

$$\varrho\,(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}) \quad \text{und} \quad \varrho\,(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})$$

dar, so sind ihre μten Potenzen

$$\varrho^\mu(\cos\mu\varphi + \sin\mu\varphi\sqrt{-1}) \quad \text{und} \quad \varrho^\mu(\cos\mu\varphi - \sin\mu\varphi\sqrt{-1})$$

und deren Summe

$$2\varrho^\mu \cos\mu\varphi$$

d. i. reell, welche ganze positive Zahl auch μ bedeuten möge.

3) Auf die Potenzensummen lassen sich alle übrigen ganzen rationalen Functionen der Wurzeln zurückführen. Wir begnügen uns, dies mehr anzudeuten als auszuführen, da wir hiervon keine weitere allgemeine Anwendung machen werden*).

---

*) Vergl. hierüber u. a. Meier Hirsch Aufgaben aus d. Theorie der algebr. Gleichungen Th. I. S. 33. und Kramp *arithm. univers. ch.* 30. *p.* 408.

Bezeichnen wir eine symmetrische Function der orm

$\alpha_1^a\alpha_2^b+\alpha_1^a\alpha_3^b+\alpha_1^a\alpha_4^b+\ldots+\alpha_2^a\alpha_1^b+\alpha_2^a\alpha_3^b+\ldots$ durch $S_{a,b}$;
rner eine symmetrische Function der Form

$$\alpha_1^a\,\alpha_2^b\,\alpha_3^c+\alpha_1^a\alpha_2^b\alpha_4^c+\ldots+\alpha_1^a\,\alpha_3^b\,\alpha_2^c+$$
$$\ldots+\alpha_2^a\,\alpha_1^b\,\alpha_3^c+\ldots \text{ durch } S_{a,b,c}$$

s. f., so ist, mit Beibehaltung der Bezeichnung der otenzensummen, da

$$(\alpha_1^a+\alpha_2^a+\alpha_3^a+\ldots)(\alpha_1^b+\alpha_2^b+\alpha_3^b+\ldots)=\alpha_1^{a+b}+\alpha_2^{a+b}+\alpha_3^{a+b}+\ldots$$
$$+\alpha_1^a\alpha_2^b+\alpha_2^a\alpha_1^b+\alpha_1^a\alpha_3^b+\alpha_3^a\alpha_1^b+\alpha_2^a\alpha_3^b+\alpha_3^a\alpha_2^b+\ldots, \text{ d. i.}$$

$S_a\,.\,S_b=S_{a+b}+S_{a,b}$; also

$$S_{a,b}=S_a\,.\,S_b-S_{a+b}.$$

erner, da

$$(\alpha_1^a\alpha_2^b+\alpha_2^a\alpha_1^b+\alpha_1^a\alpha_3^b+\ldots)\,(\alpha_1^c+\alpha_2^c+\alpha_3^c+\ldots)=$$
$$=\alpha_1^{a+c}\alpha_2^b+\alpha_2^{a+c}\alpha_1^b+\alpha_1^{a+c}\alpha_3^b+\alpha_3^{a+c}\alpha_1^b+\alpha_2^{a+c}\alpha_3^b+\alpha_3^{a+c}\alpha_2^b+\ldots$$
$$+\alpha_1^a\alpha_2^{b+c}+\alpha_2^a\alpha_1^{b+c}+\alpha_1^a\alpha_3^{b+c}+\alpha_3^a\alpha_1^{b+c}+\alpha_2^a\alpha_3^{b+c}+\alpha_3^a\alpha_2^{b+c}+\ldots$$
$$+\alpha_1^a\alpha_2^b\alpha_3^c+\alpha_2^a\alpha_1^b\alpha_3^c+\alpha_1^a\alpha_3^b\alpha_2^c+\alpha_3^a\alpha_1^b\alpha_2^c+\alpha_2^a\alpha_3^b\alpha_1^c+\alpha_3^a\alpha_2^b\alpha_1^c+\ldots$$

o kann dies geschrieben werden

$$S_{a,b}\,.\,S_c=S_{a+c,b}+S_{a,b+c}+S_{a,b,c};$$

oraus

$$S_{a,b,c}=S_{a,b}\,.\,S_c-S_{a+c,b}-S_{b+c,a}.$$

Eben so findet man

$$S_{a,b,c,d}=S_{a,b,c}\,.\,S_d-S_{a+d,b,c}-S_{b+d,a,c}-S_{c+d,a,b}$$

u. s. f.

Einen einfachen Fall dieser symmetrischen Functionen bilden die Zusammensetzungen der Coefficienten aus den Wurzeln, wo $a=b=c=d$ u. s. f. ist und die Versetzungen der gleichen Glieder weggelassen werden müssen. Auf diese Weise folgt z. B.

$$a_2=\frac{S_{1,1}}{1.\;2}=\frac{S_1S_1}{2}-\frac{S_2}{2}$$

$$-a_3=\frac{S_{1,1,1}}{1.2.3}=\frac{1}{1.2.3}\left\{S_{1,1}\,.\,S_1-S_{2,2}-S_{2,1}\right\}$$

$$=\frac{1}{1.2.3}\left\{S_1S_1S_1-3S_1S_2-2S_3\right\};$$

u. s. w., wie sich auch aus den Formeln in No. 1 di
ses §. nach successiver Substitution ergiebt.

§. 97.

In den bisherigen Sätzen dieses Abschnitts,
welchen die einfachen Factoren der Gleichungen vo
kommen, durfte der Unterschied der reellen und im
ginären Wurzeln vernachlässigt werden, noch wenig
kam der der positiven und negativen in Betracht. B
dem jetzt zu entwickelnden Satze wird es wieder n
thig, beide Unterscheidungen festzuhalten.

Wenn die einfachen reellen Factoren bisher unt
der Form $(x-\alpha)$ vorgestellt wurden, so ward dabei di
Wurzel α als positiv vorausgesetzt; ist sie also negati
so wird $(x+\alpha)$ der Factor, woraus erhellt, dass da
Product aus *allen Factoren*, *die negative* Wurzel
enthalten, nur *positive* Coefficienten enthalten kan

Hat daher eine Gleichung nur *reelle negati*
Wurzeln, so wird ihr linker Theil nur *positive* Gli
der haben. Dagegen erhellt aus §. 88, dass, wen
α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_m$ positive Grössen sind, das Product

$$(x-\alpha_1)\ (x-\alpha_2) \ldots . (x-\alpha_m)$$

abwechselnd positive und negative Zeichen haben wir
Nennen wir daher die Verbindung zweier benachbart
gleicher Zeichen, also ++ oder —— eine *Zeichen*
folge, dagegen die Verbindung zweier benachbart
verschiedener Zeichen, also +— oder —+ eine
Zeichenwechsel, so hat eine blos reelle negative Wu
zeln enthaltende Gleichung vom *m*ten Grade *m* Ze
chenfolgen, dagegen eine solche Gleichung, wen
sie nur positive Wurzeln enthält, *m* Zeichenwechsel
also jene *eben so viel* Zeichenfolgen als negative
diese *eben so viel* Zeichenwechsel als positive Wurzeln

Was die imaginären Wurzeln der Form $x=t+u\sqrt{-}$
betrifft, so haben wir in §. 75 ff. gesehen, dass t un
u als Coordinaten der Durchschnitte der beiden durc
die dortigen Gleichungen

$$\chi(t,u) = 0, \quad \psi(t,u) = 0$$

gegebenen Curven sich darstellen lassen, und dass dann jeder einzelnen positiven oder negativen Abscisse zwei gleiche und entgegengesetzte Ordinaten $+u$ und $-u$ entsprechen (§. 80 a. E.). Wir können daher hinsichtlich des Vorzeichens von t die *imaginären Wurzeln in positive und negative eintheilen.* Die den {ersteren / letzteren} entsprechenden Durchschnitte der Curven $\frac{\chi}{u}$ und $\frac{\psi}{u}$ (s. §. 80 a. E.) werden auf der {rechten / linken} Seite des Coordinatenanfangs liegen, eben so wie dies von den (den reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ entsprechenden) Durchschnitten der Curve $f(x)$ mit der Abscissenaxe gilt. Je zwei conjugirte positive imaginäre Wurzeln geben dann immer einen reellen quadratischen Factor der Form

$$[(x-t)^2+u^2] = [x^2-2xt+t^2+u^2],$$

je zwei conjugirte negative einen Factor der Form

$$[(x+t)^2+u^2] = [x^2+2xt+t^2+u^2].$$

Das Product aller aus *negativen imaginären* Wurzeln gebildeten Factoren hat daher gleich dem aus den negativen reellen nur *positive* Glieder, und es wird demnach eine Gleichung von nur negativen imaginären, folglich auch von nur negativen, übrigens imaginären oder reellen, Wurzeln durchgängig positive Coefficienten haben. Dagegen kann offenbar das Product aus *allen, die imaginären,* und mithin auch das Product aus allen, *die imaginären und negativen* Wurzeln enthaltenden, Factoren auch negative oder sogar null werdende Coefficienten geben. Nehmen wir daher an, die Gleichung vom $m$ten Grade $f(x)$ habe μ positive Wurzeln, die übrigen seyen negativ und imaginär, so wird im Allgemeinen das Product aus den Factoren, welche die letzteren enthalten, ein Polynom vom $(m-\mu)$ten Grade seyn, das theils positive, theils negative Coefficienten enthält, und in dem mehrere

Potenzen von x fehlen können. Setzen wir daher z· Abkürzung $m-\mu=n$ und nennen das eben erwähn· Product X, so wird man setzen können

$$X=x^n++\ldots-Px^p--\ldots+Qx^q++\ldots-Rx^r--,$$

wo $n>p>q>r$ u. s. f. ist und P, Q, R u. s. f. positi· Grössen aber nicht null seyn sollen, indem vorausgese· und durch die wiederholten Zeichen $++$, $--$ u. s. angedeutet wird, dass von x^n bis x^p, von x^q bis x^r n· positive, von x^p bis x^q, desgleichen von x^r bis . u. s. f. nur negative Glieder vorkommen, so dass al· das Glied $-Px^p$ das *erste* negative, nach diese· das Glied $+Qx^q$ das erste positive Glied ist u. s. Die Glieder, deren Coefficienten null geworden sin· werden auch als wirklich weggelassen aus diesem P· lynom betrachtet.

§. 98.

Fügen wir jetzt dem Product X den ersten Fact· aus den reellen positiven Wurzeln $(x-\alpha_1)$ bei, · ergiebt sich

$$(x-\alpha_1)X=x^{n+1}++\ldots-Px^{p+1}--\ldots+Qx^{q+1}+\ldots-Rx^{r+1}--\ldots$$
$$\ldots-\alpha_1x^n--\ldots+P\alpha_1x^p++\ldots-Q\alpha_1x^q--\ldots+R\alpha_1x^r++$$

d. i., da in jeder von diesen beiden Reihen die hingeschr· benen Glieder in Beziehung auf die ihnen vorangeh· den immer die *ersten* mit dem ihnen vorgeschrieben· Zeichen sind, abgekürzt,

$$(x-\alpha_1)X=x^{n+1}\ldots-P'x^{p+1}\ldots+Q'x^{q+1}\ldots-R'x^{r+1}\ldots=X,$$

wo wieder P', Q', R' positive, von Null verschiede· Grössen bedeuten. Die Zeichen nach den hingeschr· benen Gliedern sind weggelassen, weil sie unbestim· bleiben. Indess ist so viel gewiss, dass von x^{n+1} b· $-P'x^{p+1}$ wenigstens Eine Aenderung der Zeiche·

in Zeichenwechsel (wäre es auch nur erst bei dem
tzten Gliede selbst) stattfindet. Dasselbe gilt von
em Zwischenraume von $-P'x^{p+1}$ bis $+Q'x^{q+1}$, desgl.
on dem von $+Q'x^{q+1}$ bis $-R'x^{r+1}$ u. s. f. Daher kann
ich gesagt werden, das vorstehende Polynom habe
om Anfange bis zu $-P'x^{p+1}$ *wenigstens einen*, vom
nfang bis zu $+Q'x^{q+1}$ *wenigstens zwei* Zeichen-
echsel u. s. f. Sey der letzte Zeichenwechsel im
olynom X bei $\pm Ux^u$ und gehe aus diesem Gliede
dem Polynom X_1 hervor $\pm U'x^u$, wo wieder U'
ositiv; so kommen nach dem eben Erläuterten, vom
nfang des Polynoms X_1 bis zum Gliede $\pm U'x^{u+1}$
enigstens eben so viele Zeichenwechsel vor als im
olynom X vom Anfange bis zu $\pm Ux^u$. Da nun,
ach der Voraussetzung, bei $\pm Ux^u$ der *letzte* Zei-
enwechsel statt findet, so haben alle folgenden Glie-
er die Zeichen $\pm$. Setzen wir daher das letzte Glied
$= \pm Z$, so giebt dies in X_1 das letzte Glied $\mp \alpha_1 Z$.
s wird also in dem Polynom X_1 von $\pm U'x^{u+1}$ bis
um letzten Gliede $\mp \alpha_1 Z$ *noch ein* Zeichenwechsel
att finden, der in dem Polynom X nicht vorkommt.
emnach hat das Polynom $X_1 = (x - \alpha_1)X$ *wenig-
ens Einen Zeichenwechsel mehr als das Polynom* X.

Fügen wir nun dem Polynom X_1 den Factor
$x-\alpha_2$) bei und setzen $(x-\alpha_2)\ X_1 = X_2$, so gilt der
en ausgesprochene Satz offenbar ebenfalls von X_2
nd X_1. Auf gleiche Weise wird er von X_3 und X_2
elten, wenn $X_3 = (x-\alpha_3)X_2$ u. s. f. Es muss da-
er auch das Polynom X_2 zum wenigsten *zwei*, das
olynom X_3 zum wenigsten *drei* Zeichenwechsel mehr
aben als das ursprüngliche Polynom X, u. s. f.

Ist daher allgemein

$$X(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_\mu) = f(x),$$

hat f(x) *wenigstens* μ *Zeichenwechsel mehr als* X.

Hat nun die Gleichung $f(x)=0$ gar keine nega-
tiven und imaginären Wurzeln, so wird in dem Poly-
nom X, $n=0$, also $X=1$, folglich $\mu=m$, und e
kommen also in dem auf das Mononom 1 reduci-
ten Polynom gar keine Zeichenwechsel vor. D
aber die vorigen Schlüsse ihre Gültigkeit behalten
so wird dann folgen, dass $f(x)$ zum wenigsten
Zeichenwechsel hat. Weil aber die Gleichung
$f(x)=0$ vom $m$ten Grade ist, so kann sie auc
nicht mehr haben. Es folgt also allgemein, *da*
eine Gleichung nie mehr positive reelle Wurzel
haben kann als Zeichenwechsel in ihr vorkom-
men. Vertauscht man nun in $f(x)=0$, x mit $-x$
so wird $f(-x)=0$ die *entgegengesetzte* Gleichun
der gegebenen, deren $\left\{\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{negative}\end{matrix}\right\}$ Wurzeln mit de
$\left\{\begin{matrix}\text{negativen}\\ \text{positiven}\end{matrix}\right\}$ von $f(x)=0$ identisch sind. Nach dem s
eben ausgesprochenen Satze wird daher $f(-x)=0$ nicl
mehr positive reelle, d. h. die Gleichung $f(x)=$
nicht mehr negative reelle Wurzeln haben können a
in ersterer Zeichenwechsel vorkommen. Daher *h*
eine Gleichung nie mehr positive reelle Wurzel
als sie selbst Zeichenwechsel besitzt, nie mehr nega-
tive als Zeichenwechsel in ihrer entgegengesetzte
Gleichung vorkommen.

§. 99.

Der vorstehende Satz, nach seinem Erfinder Des-
cartes der Cartesische*) genannt, kann noch a

*) R. des Cartes *geometria ed.* Schooten *Amstelod.* 168
Lib. III. p. 70: „*Ex quibus cognoscitur, quot verae et quot fals*
radices in unaquaque Aequatione haberi possint. Nimirum, tot in
veras haberi posse, quot variationes reperiuntur signorum + et —;
tot falsas, quot vicibus ibidem deprehenduntur duo signa + vel duo s
gna —, quae se invicem sequuntur.“ Die Engländer suchten lang
Zeit die Erfindung dieses Satzes dem Th. Harriot zu vindicire
in dessen Schriften er jedoch nicht vorkommt.

dre Art ausgedrückt werden. Unterscheiden wir
mlich in der vorgelegten Gleichung *unmittelbare*
d *unterbrochene* Zeichenwechsel und Zeichenfolgen,
ter jenen solche verstehend, deren Zeichen Poten-
n von x angehören, von denen die Exponenten zwei
mittelbar folgende natürliche Zahlen sind, unter
esen aber solche, deren Exponenten um mehr als
ne Einheit differiren, und theilen wir die unterbro-
enen Zeichen-Wechsel und Folgen wieder, je nach-
m die Zahl der fehlenden Glieder (die Menge der
nheiten der Differenz der Exponenten) eine gerade
er ungerade ist, in *gerade* und *ungerade unter-*
ochene. Geht man nun von der Gleichung $f(x)=0$ zu
rer entgegengesetzten $f(-x)=0$ über, mag dies
n dadurch geschehen, dass man x mit $-x$ vertauscht,
er dadurch, dass man, ohne x zu verändern, die
urzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ mit ihren entgegengesetzten
rtauscht, so ist in beiden Fällen klar (im letztern
ch §. 88), dass die entgegengesetzte Gleichung im
sten, 3ten u. s. f., allgemein in allen *ungeraden* Glie-
rn dieselben Zeichen, in dem 2ten, 4ten u. s. f., also in
en *geraden* Gliedern die entgegengesetzten Zeichen
t als die gegebene Gleichung. Offenbar wird daher
der unmittelbare Zeichen*wechsel* der gegebenen Glei-
ung in der entgegengesetzten zu einer unmittelbaren
ichen*folge*. Ferner giebt jeder *gerade* unterbrochene
ichenwechsel der ersteren Gleichung, da nothwendig
s eine Glied in einer geraden, das andere in einer
geraden Stelle steht, in der entgegengesetzten eine
rade unterbrochene *Zeichenfolge;* endlich jeder
gerade unterbrochene *Zeichenwechsel*, aus dem
tgegengesetzten Grunde, wieder einen *ungerade* un-
brochenen *Zeichenwechsel.*

Da nun die gegebene Gleichung die entgegenge-
tzte ihrer entgegengesetzten ist, so folgt, vermöge
s vorigen §., wenn man von der Gleichung $f(-x)=0$
$f(x)=0$ übergeht, dass *letztere nie mehr negative*

Wurzeln enthält, als die Summe der unmittelbar
und gerade unterbrochenen Zeichenfolgen und d
ungerade unterbrochenen Zeichenwechsel Einh
ten hat.

§. 100.

Fügen wir jetzt diesem Satze noch einige Z
sätze bei.

1) Ist $f(x)=0$ eine *vollständige* Gleichung,
ist demnach die Zahl der negativen Wurzeln nic
grösser als die Zahl der Zeichenfolgen: denn au
die entgegengesetzte Gleichung wird dann eine vo
ständige seyn.

2) Ist A die Zahl der unmittelbaren Zeichenwec
sel, B die der unmittelbaren Zeichenfolgen und $f(x)=$
eine vollständige Gleichung vom $m$ten Grade, so i
$A+B=m=$ der Anzahl der Wurzeln. Da aber d
vorhergegangene Satz nur die Zahl bestimmt, welc
die Menge der positiven und der negativen reell
Wurzeln *höchstens* erreichen kann, so lässt dersel
unentschieden, ob und wie viel *imaginäre* Wurz
in der Gleichung enthalten seyn mögen. Weiss m
aber aus andern Umständen, dass sie deren *kei*
hat, so kann der Satz nun so ausgesprochen werde
in jeder vollständigen Gleichung, die nur ree
Wurzeln hat, ist die Zahl der positiven Wurz
gleich der Zahl der Zeichenwechsel, diejenige d
negativen aber gleich der der Zeichenfolgen.

3) Sey die Gleichung unvollständig und zwar
die Zahl der *gerade* unterbrochnen Zeichenwechsel $=$;
— — — — Zeichenfolgen $=$;
— — *ungerade* — Zeichenwechsel $=$;
— — — — Zeichenfolgen $=$;
übrigens wie vorher
die Zahl der unmittelbaren Zeichenwechsel $=A$;
— — — Zeichenfolgen $=B$;

) ist die Zahl der sämmtlichen fehlenden Glieder

$$=m-A-B-a-b-c-d=e.$$

Denn sie muss erhalten werden, wenn man von er Zahl von Gliedern, die überhaupt in einer voll-ändigen Gleichung vorkommen können, diejenigen bzieht, die, nach den angenommenen Voraussetzungen, irklich vorhanden sind. Nun aber besteht jede Zei-henverbindung, sey sie ein Wechsel oder eine Folge, nmittelbar oder unterbrochen, zwar aus zwei Gliedern, a aber das zweite auch schon wieder das erste der ächstfolgenden Verbindung ist, so kann nur die al-lererste Zeichenverbindung als zwei, jede andre als ur Ein wirklich vorhandenes Glied anzeigend betrach-et werden. Demnach ist die Zahl der wirklich vor-andenen Glieder

$$=A+B+a+b+c+d+1.$$

Nun aber hat eine vollständige Gleichung vom ten Grade $m+1$ Glieder; demnach ist, wenn jene nzahl von dieser abgezogen wird, wirklich die Zahl er fehlenden Glieder die oben angegebene $=e$.

Nach dem Lehrsatz ist nun die Zahl

der positiven Wurzeln $\overline{\overline{<}}\ A+a+c$;

nd — negativen — $\overline{\overline{<}}\ B+b+d$;

lglich die Zahl der sämmtl.

reellen Wurzeln $\overline{\overline{<}}\ A+B+a+b+2c$,

d. i. $\overline{\overline{<}}\ m+c-d-e$,

lglich die Anzahl aller *imaginären* Wurzeln $e+d-c$, d. h. die Zahl der reellen Wurzeln t *höchstens* gleich $m+c-d-e$ und die der imaginä-n *wenigstens* gleich $e+d-c$.

Hieraus lässt sich endlich auch die Regel bilden: n zu erfahren, wie viel imaginäre Wurzeln eine

Gleichung mindestens hat, zähle man die fehlende Glieder dergestalt zusammen, dass man für diejen gen, welche in ungerader Anzahl zwischen einem Ze chenwechsel fehlen, immer eine Einheit weniger, fi die aber, welche, ebenfalls in ungerader Anzahl, zw schen einer Zeichenfolge fehlen, immer eine Einhe mehr rechnet als ihre Anzahl beträgt*).

Wenden wir dies auf die in den §§. 82—87 b handelte Formel

$$x^m + a_m = 0$$

an, so fehlen hier $e=m-1$ Glieder. Ist daher

1) m gerade und a_m positiv, so ist eine ungerac unterbrochene Zeichenfolge vorhanden; also $d=$ die übrigen Grössen sind $=0$, also $e+d-c=m$;

2) m gerade und a_m negativ, so ist $c=1$, d übrigen $=0$, folglich $e+d-c=m-2$;

3) m ungerade und a_m positiv, so wird $a=$ $c=d=$ u.s.f.$=0$, folglich $e+d-c=m-1$;

4) m ungerade und a_m negativ, so wird $b=$ $c=d=$u.s.f.$=0$, also $e+d-c=m-1$.

Dies stimmt mit den directen Resultaten in §. 8 und 83 überein, und es zeigt sich, dass hier die mi deste Zahl der imaginären zugleich die wirklich vo handene Anzahl derselben ist.

Als zweite Anwendung diene die in §. 85 aufg löste Gleichung

$$x^{2m} + a_m x^m + a_{2m} = 0.$$

Für diese ist allgemein $e=2m-2$, $A=B=0$. D

*) Vorstehende, in den §§. 97—100 enthaltene Entwickelu des Cartesischen Lehrsatzes — ohnstreitig die einfachste und stren ste, die es giebt — ist nach Gauss geführt (Crelle's Journ III, S. 1.).

übrigen zusammengehörigen Werthe ersieht man aus folgender Zusammenstellung.

Wenn m gerade, so ist $a=b=0$, übrigens

a_m,	a_{2m},	c,	d,	$e+d-c$
+	+	0	2	$2m$
+	—	1	1	$2m-2$
—	+	2	0	$2m-4$
—	—	1	1	$2m-2$.

Wenn m ungerade, so ist $c=d=0$, daher ohne Unterschied $e+d-c=2m-2$.

Sechster Abschnitt.

Von den Grenzen der Wurzeln im Allgemeinen

---

§. 101.

Da es zur Auflösung der höheren Gleichunge nicht allgemeine analytische Formeln giebt, wie fü die Gleichungen der ersten vier Grade und einige be sondere Fälle der übrigen, so bedient man sich z diesem Zwecke der *Näherungsmethoden*, durch we che aus einer dem wahren Werthe einer Wurzel nah kommenden Bestimmung successiv genauere Wurze werthe berechnet werden. Hierbei ist es aber nöthi Zahlenwerthe zu kennen, von denen man versiche ist, dass sie *zwischen* zwei nächste Wurzeln fallen denn nur dann wird eine Zahl ein Näherungswert einer Wurzel heissen können, wenn zwischen beide nicht noch eine andre Wurzel liegt, ja die Zahl wi diesen Namen eigentlich nur dann mit vollem Rec führen, wenn sie einer gewissen Wurzel näher lieg als ihrer nächst benachbarten. Da aber diese Näh rungsmethoden sich wenigstens zunächst nur auf d reellen Wurzeln beziehen, so wird es ferner erforde lich, Kennzeichen anzugeben, durch welche die im ginären Wurzeln von den reellen sich unterscheid lassen. Vor Allem aber wird es, um viele vergeblic

beit zu vermeiden, nothwendig seyn zu erörtern, ischen welchen Grenzen *sämmtliche* Wurzeln der leichung enthalten sind. Was die reellen betrifft, ist der Sinn dieser Aufgabe von selbst klar, indem, nn die Gleichung reelle positive und negative Wurln zugleich hat, auch die eine der Grenzen positiv, e andere negativ seyn wird. In Beziehung auf die aginären Wurzeln der Form $t+u\sqrt{-1}$ aber muss an sich erinnern, dass wir im §. 97 auch diese nach m Vorzeichen von t in positive und negative getheilt iben. Dehnt man also den Begriff der *äussersten renzen der Wurzeln* auch auf die imaginären aus, werden erstere auch die ersten Glieder sämmtlicher aginärer Wurzeln zwischen sich einschliessen müssen.

§. 102.

Zur Auffindung der äussersten Grenzen der Wurln dient zuerst folgende von Newton angegebene ethode*). Sie beruht auf dem Princip, dass eine leichung, von der bekannt ist, dass sie nur negave, übrigens reelle oder imaginäre Wurzeln hat, durchingig nur positive Glieder haben kann, was bereits 1 97sten §. bemerkt worden ist.

Sey nämlich l die eine der gesuchten äussern renzen der Gleichung

$$f(x)=x^m+a_1 x^{m-1}+a_2 x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m=0,$$

nd zwar diejenige, welche grösser als alle positiven Vurzeln ist und daher die *obere Grenze* genannt erden kann; dann ist, wenn wir unter x alle reellen id imaginären Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ verehen, $x-l$ immer negativ. Setzen wir nun $x-l=x'$ id führen durch Substitution von $x=l+x'$ in jener leichung x' als Unbekannte ein, so wird eine neue leichung $f(l+x')=0$ entstehen, deren Wurzeln um kleiner sind als diejenigen von $f(x)=0$, folglich

*) *Arithm. univers. L. II. c. IV. nr. VII. ed. Cast. T. II. p.* 84.

jedenfalls durchgängig negativ. Entwickeln wir dah die neu entstandene Gleichung nach Taylor's Lehrsat multipliciren das Resultat mit $1.2\ldots m$ und ordnen nach den absteigenden Potenzen von x', so wir nach dem aufgestellten Princip, jeder Coefficient di ser Gleichung positiv seyn müssen. Die bezeichne Entwickelung giebt aber

$$x'^m + \frac{f^{(m-1)}(l)}{1.2\ldots(m-1)} x'^{m-1} + \ldots$$
$$+ \frac{f''(l)}{1.2} x'^2 + \frac{f'(l)}{1} x' + f(l) = 0.$$

Man kann daher die obige Grenze wirklich finde wenn man in dieser Gleichung für die Coefficient der Potenzen von x, oder, was hinreicht, da die Ne ner derselben immer positiv sind, für die Function

$$f(l) = l^m + a_1 l^{m-1} + \ldots + a_{m-1} l + a_m;$$
$$f'(l) = m l^{m-1} + (m-1) a_1 l^{m-2} + \ldots + 2 a_{m-2} l + 1.a_{m-1}$$
$$f''(l) = m(m-1) l^{m-2} + (m-1)(m-2) a_1 l^{m-3} + \ldots$$
$$+ 3.2.a_{m-3} l + 2.1.a_{m-}$$

. . . .

$$f^{(m-2)}(l) = m(m-1)\ldots 4.3.l^2$$
$$+ (m-1)(m-2) + \ldots 3.2.a_1 l + (m-2)(m-3)\ldots 2.1.a$$
$$f^{(m-1)}(l) = m(m-1)\ldots 3.2.l. + (m-1)(m-2)\ldots 2.1.a$$

solche Werthe von l annimmt, die alle diese Au drücke zugleich positiv machen. *Die obere Gren der Wurzeln einer Gleichung ist also derjenig Werth, der in ihrem linken Theile und dess sämmtlichen Derivationen für* x *substituirt, al zugleich positiv macht.*

Sey z. B. die gegebene Gleichung folgende*):

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0; \text{ al}$$
$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63$$
$$f''(x) = 20x^3 - 24x^2 - 60x + 60$$
$$f'''(x) = 60x^2 - 48x - 60$$
$$f^{IV}(x) = 120x - 48,$$

*) S. Newton a. a. O.

wird $f^{\text{IV}}(x)$ schon für $x=1$ positiv, nicht aber $f'''(x)$. Setzt man aber $x=2$, so wird nicht nur diese positiv, sondern auch alle übrigen Functionen. Es ist nämlich

$$f(2)=46;\ f'(2)=79;\ f''(2)=4.1;$$
$$f'''(2)=12.7;\ f^{\text{IV}}(2)=24.8;$$

es ist also 2 die obere Grenze der Wurzeln.

Man gelangt zu dieser Methode auch noch durch andre nicht minder einfache Betrachtungen, als die vorstehenden. Liegen nämlich über irgend einen positiven Werth x_1 von x hinaus noch eine oder mehrere Wurzeln, so muss, durch Vermehrung von x_1 um irgend einen hinlänglich grossen oder kleinen Werth h, $f(x_1)$ in einen Werth $f(x_1+h)$ übergehen, der das entgegengesetzte Zeichen hat, da, mit Ausnahme des, nach §. 92 leicht erkennbaren, Falls von den gleichen Wurzeln, $f(x)$, nachdem es null geworden, das entgegengesetzte Zeichen annimmt. Aber es ist

$$f(x_1+h)=f(x_1)+hf'(x_1)+\frac{h^2}{2}f''(x_1)+\cdots$$
$$+\frac{h^m}{2\ldots m}f^{(m)}(x_1).$$

Es müssen also dann unter den Functionen f', f'' u. s. f. offenbar eine oder einige seyn, welche das entgegengesetzte Zeichen von $f(x_1)$ haben, also, wenn dieses positiv, negativ sind. Dass aber $f(x_1)$ endlich positiv werden muss, ist klar, weil, für $x=\Omega$, dann $f(x)=+\Omega^m$ wird. Sind dagegen sämmtliche Functionen positiv, so kann, wie man auch h annehmen möge, wenn es nur positiv bleibt, $f(x_1+h)$ weder null noch negativ werden. Es ist leicht, nach §. 67, dieser Darstellung auch eine geometrische Versinnlichung beizufügen. Wir kommen übrigens auf diesen Gegenstand in der Folge unter einem allgemeinen Gesichtspuncte zurück.

§. 103.

Das eben gelehrte Verfahren zur Auffindung de obern Grenze der Wurzeln beruht auf Versuchen, di indess immer sehr schnell zum Ziele führen. Ma kann jedoch auch einen allgemeinen Ausdruck fü diese Grenze angeben, der indess freilich selten di Wurzeln so eng begrenzt, als dies nach Newton' Methode geschieht. Dieser Ausdruck rührt von Mac laurin*) her und wird auf folgendem Wege gefun den. Behält l seine bisherige Bedeutung, so wir $f(l)$ offenbar immer positiv seyn, wenn selbst in de Falle, dass alle Coefficienten a_1, a_2, a_3,... a_m ne gativ wären, dennoch das erste positive Glied l grösser ist als die Summe aller folgenden. Sey nu der grösste negative Coefficient a_n, so ist, dem ab soluten Werthe nach,

$$a_1 l^{m-1} + a_2 l^{m-2} + \ldots a_m < a_n(l^{m-1} + l^{m-2} + \ldots + l + 1)$$
$$< a_n\left(\frac{l^m - 1}{l - 1}\right).$$

Wird also für l ein solcher Werth genommen, dass

$$l^m > a_n\left(\frac{l^m - 1}{l - 1}\right),$$

so wird $f(l)$ positiv. Es ist aber

$$a_n\left(\frac{l^m - 1}{l - 1}\right) = \frac{a_n l^m}{l - 1} - \frac{a_n}{l - 1}.$$

Setzt man daher $l^m = \frac{a_n l^m}{l - 1}$,

$$\text{d. i. } l = 1 + a_n,$$

so ist der Bedingung Gnüge geschehen. Es ist nu zu zeigen, dass dieser Werth von l auch $f'(l)$, $f''(l$ .... $f^{(m-1)}(l)$ positiv macht.

Dies geschieht ebenfalls dadurch, dass nachge wiesen wird, es sey für $l = 1 + a_n$ dem absoluten Wer

---

*) *Treatise of Algebra. London* 1748 *p.* 172.

nach immer das Anfangsglied von $f'(l)$ grösser als Summe aller folgenden, also

$$ml^{m-1} > (m-1)\,a_1\,l^{m-2} + (m-2)\,a_2\,l^{m-3} + \ldots + 1.\,a_{m-1}.$$

n ist der rechte Theil dieser Ungleichung offenbar

$$< a_n((m-1)l^{m-2} + (m-2)\,l^{m-3} + \ldots + 1)$$

d noch mehr

$$< a_n(m-1)(l^{m-2} + l^{m-3} + \ldots + 1),$$

$$< a_n(m-1)\left(\frac{l^{m-1}-1}{l-1}\right).$$

ir $l = 1 + a_n$ wird hieraus $(m-1)[(1+a_n)^{m-1}-1]$, ein isdruck, welcher kleiner als $m(1+a_n)^{m-1}$, d. i. kleir als der Werth von ml^{m-1} für $l = 1 + a_n$ ist: demch ist für diesen Werth auch $f'(l)$ positiv. Ganz daslbe wird allgemein für $f^{(k)}(l)$ bewiesen werden könn. Denn da

$$\begin{aligned} f^{(k)}(l) = {} & m(m-1)\ldots(m-k+1)\,l^{m-k} \\ & + (m-1)(m-2)\ldots(m-k)\,a_1\,l^{m-k-1} \\ & + (m-2)(m-3)\ldots(m-k-1)\,a_2\,l^{m-k-2} + \ldots \\ & \ldots + k(k-1)\ldots 2.\,1.\,a_{m-k}\,; \end{aligned}$$

ist dieser polynomische Ausdruck vom zweiten Gliede genommen offenbar

$$< a_n(m-1)(m-2)\ldots(m-k)\,(l^{m-k-1} + l^{m-k-2} + \ldots + 1);$$

$$< a_n(m-1)(m-2)\ldots(m-k)\left(\frac{l^{m-k}-1}{l-1}\right);$$

i. für $l = 1 + a_n$

$$< (m-1)(m-2)\ldots(m-k)\,[(1+a_n)^{m-k}-1],$$

$$< m(m-1)\ldots(m-k+1)\,(1+a_n)^{m-k};$$

elches der Werth des Anfangsgliedes für $l = 1 + a_n$ t. Dieser Werth macht also die sämmtlichen Funionen $f(l), f'(l), f''(l), \ldots f^{(m-1)}(l)$ positiv und ist daer nach §. 102 die obere Grenze der Wurzeln. *Eine here Grenze für die Wurzeln einer Gleichung ird also erhalten, wenn man den absoluten Werth*

des grössten negativen Coefficienten um eine Ein-heit vermehrt.

In dem Beispiel des vorhergehenden §. würde hiernach $l = 121$, folglich um vieles grösser als die nach Newton's Methode gefundene Grenze $l = 2$. Wäre die Gleichung gewesen

$$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x + 120 = 0,$$

so ergäbe sich die näher liegende Grenze $l = 11$. Nach Newton's Bestimmung bliebe auch dann noch $l = 2$.

§. 104.

Etwas engere Grenzen als diejenigen zu seyn pfle-gen, welche man auf die im vorigen §. angegeben Weise findet, erhält man in den meisten Fällen a[uf] folgende Art. Sey wieder a_n der grösste negati[ve] Coefficient, r die Zahl der Glieder, die dem erst[en] negativen Coefficienten vorangehen (wobei, wenn e[i]nige fehlen sollten, diese mitzuzählen sind), so i[st] dieser selbst $= a_r$. Demnach wird $f(l)$ positiv, wen[n] absolut genommen

$$l^m > a_r l^{m-r} + a_{r+1} l^{m-r-1} + \ldots a_{m-1} l + a_m.$$

Der Ausdruck zur Rechten ist aber offenbar

$$< a_n (l^{m-r} + l^{m-r-1} + \ldots + 1)$$

$$< a_n \left(\frac{l^{m-r+1} - 1}{l - 1} \right).$$

Macht man daher

$$l^m > a_n \left(\frac{l^{m-r+1} - 1}{l - 1} \right),$$

so wird $f(l)$ positiv. Vorstehender Bedingung wi[rd] aber Gnüge geleistet, wenn man

$$l^m \geqq \frac{a_n \, l^{m-r+1}}{l-1}, \text{ d. i. } (l-1) l^{r-1} \geqq a_n$$

setzt, was wiederum statt hat, sobald

$$(l-1)^r \geqq a_n, \text{ also } l \geqq 1 + \sqrt[r]{a_n}$$

genommen wird. Dass dann auch $f'(l)$, $f''(l)$ u. s.

sitiv werden, ergiebt sich auf dieselbe Art wie im rigen §. *Die Wurzel von demjenigen Grade, der rch die Zahl der dem ersten negativen Coefficienten vorhergehenden Glieder angegeben wird, s dem grössten negativen Coefficienten gezogen d um eine Einheit vermehrt, giebt also eine Bestimmung für die obere Grenze der positiven Wurzeln.*

Die obere Grenze für das zuletzt gewählte Beiiel, für welches die vorigen §§. $l=2$ und $l=11$ ben, würde nach dieser Regel, da hier $r=1$, und $=10$, wieder $l=11$ seyn. Wäre aber gegeben

$$x^5+2x^4-10x^3-30x^2+63x+120=0;$$

für nach §. 102 $l=3$, nach §. 103 $l=31$ seyn irde, so findet sich hier, wegen $r=2$, $l \geqq 1+\sqrt{30}$, i. $> 6{,}5$.

Noch genauer ist folgende Bestimmung der Grenze. wieder r die Zahl der dem ersten negativen Coicienten vorhergehenden Glieder und a_s der *klein-* Coefficient derselben, so ist die Summe dieser Glieder

$$< a_s\,(l^m+l^{m-1}+\ldots+l^{m-r+1})$$
$$< a_s\,l^{m-r+1}\left(\frac{l^r-1}{l-1}\right).$$

Macht man daher diesen Ausdruck grösser als $\left(\frac{l^{m-r+1}-1}{l-1}\right)$, so ist der hierdurch bedingte Werth n l der obere Grenzwerth. Es findet sich leicht

$$l \geqq \sqrt[r]{\left(1+\frac{a_n}{a_s}\right)}.$$

letzten Beispiel wird hiernach $l \geqq \sqrt{31}=5{,}57$*).

---

*) Andre künstlichere Grenzen, die sich auf die Summen der tenzen der Wurzeln beziehen, finden sich bei Newton und Maclurin a. d. a. OO. Sie sind aber nur von theoretischem Interesse. - Wie Lagrange (*résolut. des équat. numér. Not. VIII. p.* 174

§. 105.

Ist die obere Grenze der Wurzeln gefunden, so kann man auch leicht die *untere* der positiven und die Grenzen der *negativen* Wurzeln finden. Setzt man nämlich in der Gleichung $f(x)=0$, $\frac{1}{z}$ für x und bildet somit eine Gleichung, deren Wurzeln die reciproken der vorgegebenen sind, so ergiebt sich, nach Multiplication mit $\frac{z^m}{a_m}$,

$$z^m + \frac{a_{m-1}}{a_m} z^{m-1} + \frac{a_{m-2}}{a_m} z^{m-2} + \ldots + \frac{a_1}{a_m} z + \frac{1}{a_m} = 0$$

Heissen nun die Wurzeln von $f(x)=0$, α_1, α_2, α_3 ... α_m, so sind die Wurzeln der umgekehrten Gleichung $\frac{1}{\alpha_1}$, $\frac{1}{\alpha_2}$, $\frac{1}{\alpha_3}$, ... $\frac{1}{\alpha_m}$. Sucht man nun die obere positive Grenze dieser Gleichung $=l'$, so ist l' grösser als der grösste positive Werth der $\frac{1}{\alpha_1}$, $\frac{1}{\alpha_2}$, $\frac{1}{\alpha_3}$ u. s. f. also $\frac{1}{l'}$ kleiner als der kleinste positive Werth der α_1, α_2, α_3 u. s. f. Heisst der grösste negative Coefficient der Gleichung nach z, a_ν, so ist

$$l'=1+a_\nu \text{ oder} = 1+\sqrt[\varrho]{a_\nu} \text{ oder endlich } \sqrt[\varrho]{\left(1+\frac{a_\nu}{a_\sigma}\right)}$$

wenn ϱ die Zahl der dem ersten negativen vorhergehenden positiven Glieder und a_σ den kleinsten Coefficienten derselben bedeutet. Es sind also

$$\lambda = \frac{1}{1+a_\nu}, \lambda = \frac{1}{1+\sqrt[\varrho]{a_\nu}}, \lambda = \sqrt[\varrho]{\left(\frac{a_\sigma}{a_\sigma+a_\nu}\right)}$$

---

ed. 1ère) bemerkt, waren die hier vorgetragenen Regeln von Newton und Maclaurin auch schon Rolle bekannt, dessen Algebra 1690 erschien.

estimmungen für die untere Grenze der positiven urzeln.

Um von den Grenzen der positiven Wurzeln zu nen der negativen zu gelangen, gehe man von $f(x)=0$ ihrer entgegengesetzten über, indem man x mit $-x$ er, was dasselbe, α_1, α_2, α_3 u. s. f. beziehlich mit α_1, $-\alpha_2$, $-\alpha_3$ u. s. f. vertauscht. Suchen wir da- r einen Werth g, der grösser ist als die grösste sitive Wurzel von $f(-x)=0$, so wird $-g$ *die eine renze der negativen Wurzeln von* f(x) = 0 dar- ellen. Eben so, wenn γ die untere Grenze der po- iven Wurzeln von $f(-x)=0$, so wird $-\gamma$ *die andre renze der negativen Wurzeln von* f(x) = 0 *seyn.*

Gehen wir von der Gleichung

$$x^5+2x^4-10x^3-30x^2+63x+120=0$$

ihrer reciproken über, so findet sich für diese

$$z^5+\frac{21}{40}z^4-\frac{z^3}{4}-\frac{z^2}{12}+\frac{z}{60}+\frac{1}{120}=0.$$

er ist $a_\nu=\frac{1}{4}$, $\varrho=2$, $a_\sigma=\frac{21}{40}$, daher

$$\lambda=\frac{4}{5} \text{ oder } =\frac{2}{3}, \text{ oder } <\sqrt{\left(\frac{21}{31}\right)}.$$

Was die entgegengesetzte Gleichung betrifft, so rd diese

$$x^5-2x^4-10x^3+30x^2+63x-120=0.$$

er ist $g=2$, also $-g=-2$,

$$=\frac{1}{121}, \text{ oder } =\frac{1}{\sqrt{121}}, \text{also } \gamma=-\frac{1}{121} \text{ oder } =-\sqrt{\left(\frac{1}{121}\right)}$$

§. 106.

So wie aber für die obere Grenze der positiven urzeln die Newton'sche Regel die bequemste und auchbarste war, so kann man sie auch mit Nutzen f die negativen Wurzeln ausdehnen. Um nämlich die ere Grenze von $f(-x)=0$ zu finden, müsste man nen *positiven* Werth von $x=g$ suchen, der die nctionen

$f(-x), f'(-x), f''(-x) \ldots f^{(m-1)}(-x), f^{(m)}(-$
zugleich positiv machte *). Dies ist aber auch so vi
als ob man sagt: *es ist ein negativer Werth v*
$x = -g$ *in der ursprünglichen Gleichung* $f(x) =$
zu suchen, der den Functionen

$$f^{(m-1)}(x),\ f^{(m-2)}(x) \ldots\ f''(x),\ f'(x),\ f(x),$$

abwechselnd positive und negative Zeichen erthei
Denn da jede dieser Functionen ein Polynom aus P
tenzen von x und daher in reelle Factoren vom erst
und zweiten Grade zerlegbar ist, von denen die le
tern allemal nur positiv werden können, so wird, we
man x mit $-x$ vertauscht, ein $\left\{\begin{matrix}\text{positives}\\ \text{negatives}\end{matrix}\right\}$ Resultat h
auskommen, je nachdem der Grad des Polynoms ei
$\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ Zahl ist, so dass also in der That ein Wer
von $x = l$, der die Functionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ u. s.
positiv macht, den Functionen $f(-x)$, $f'(-x)$, $f''(-$
wechselnde Zeichen giebt, und eben so umgekeh
In dem Beispiel des §. 102 würde -2 zwar $f^{(v)}($
und $f'''(x)$ positiv, $f^{(iv)}(x)$ und $f''(x)$ negativ, ab
auch $f'(x)$ negativ machen, so dass hier der Wechs
der Zeichen unterbrochen würde. Dagegen findet e
durchgängiger Wechsel statt für $x = -3$, so dass al
-3 die untere Grenze der negativen Wurzeln d
dortigen Gleichung ist. Für die Gleichung des vo
gen Paragraphs

$$x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 30x^2 + 63x + 120 = 0$$

ergeben sich nach dieser Regel und §. 102 als Gren
werthe der Wurzeln 3 und -2, was natürlich, da s
die entgegengesetzte der vorigen ist.

Es lassen sich übrigens die am Ende des §. 1
angestellten Betrachtungen auch auf den vorliegend

---

*) Man bemerkt leicht, dass $f^{(m)}(x) = 1.2 \ldots m$ jederzeit v
selbst und unabhängig von x positiv ist.

l übertragen. Denn bedeutet jetzt x_1 irgend einen ativen Werth von x, so ist

$$f(x_1-h)=f(x_1)-hf'(x_1)+\frac{h^2}{2}f''(x_1)-\ldots$$
$$+(-1)^m\frac{h^m}{2.3\ldots m}f^{(m)}(x_1).$$

Haben nun hier für $x=x_1$ die Functionen f, f', s. f. abwechselnde Zeichen, so sind alle Glieder vorstehenden Entwickelung Zeichengleichartig, und ist daher, wie gross oder klein man h nehmen ge, ein Nullwerden von $f(x)$ nicht weiter denkbar. lers verhält es sich dagegen, wenn ein oder einige eder ein denen der übrigen entgegengesetztes Zein erhalten: denn dann ist wenigstens die Möglich- eines nochmaligen Nullwerdens für irgend ein h ch vorhanden.

§. 107.

Hat man nach einer dieser Methoden die obere untere Grenze gefunden, innerhalb deren sämmte Wurzeln enthalten sind, so kommt es nun zunächst auf an, Grenzen anzugeben, zwischen denen die *einen* reellen Wurzeln enthalten sind. Wir gehen hierbei folgendem Princip aus: *Geben zwei Zahlen* a *und dem linken Theile einer Gleichung* f(x)=0 *subuirt, Resultate von entgegengesetzten Zeichen, hat die Gleichung zum wenigsten Eine reelle urzel, welche zwischen den Werthen* a *und* b *t; doch kann zwischen diesen Grenzen auch ird welche ungerade Anzahl von reellen Wurzeln alten seyn.*

Dieser Satz lässt sich auf mehr als Eine Art eren.

Seyen *erstens* α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_\mu$ die reellen Wurzeln Gleichung, also $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$, ... $x-\alpha_\mu$ die reel- Factoren, so ist, wenn $\varphi(x)$ das Product aus den ginären Factoren bedeutet,

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_\mu)\ \varphi(x) = 0;$$

also

$$f(a) = (a-\alpha_1)(a-\alpha_2) \ldots (a-\alpha_\mu)\ \varphi(a) \gtrless 0;$$

und

$$f(b) = (b-\alpha_1)(b-\alpha_2) \ldots (b-\alpha_\mu)\ \varphi(b) \lesseqgtr 0.$$

Da nun sowohl $\varphi(a)$ als $\varphi(b)$ immer positiv (§. 9), so muss in diesen Ausdrücken für $f(a)$ und $f(b)$ e *ungerade* Anzahl von Factoren paarweise verglich entgegengesetzte Zeichen haben, zum mindesten a Ein Paar solcher Factoren, z. B. $a-\alpha_2$ und $b-\alpha_2$ Ist nun $a-\alpha_2 \gtrless 0$, und $b-\alpha_2 \lesseqgtr 0$, so liegt offen α_2 zwischen a und b, und da nach der Voraussetz a und b reelle Grössen sind, so ist auch α_2 re Der Beweis wird derselbe bleiben, wenn 3, 5 u. s Paare von Factoren mit entgegengesetzten Zeic vorausgesetzt werden.

Zweitens kann der Beweis, ohne Voraussetz der Factorenzerlegung, wie folgt, geführt wer Theilt man die Differenz $b-a$ in eine beliebig gr Menge von gleichen Theilen, z. B. in n Theile, s erhält man zwischen a und b die eingeschalte Werthe

$$a+\frac{b-a}{n},\ a+2\frac{b-a}{n}, \ldots\ b-2\frac{b-a}{n},\ b-\frac{b-a}{n}$$

und daher zwischen den Werthen $f(a), f(b)$ die genden

$$f\left(a+\frac{b-a}{n}\right), f\left(a+2\frac{b-a}{n}\right) \ldots f\left(b-2\frac{b-a}{n}\right),\ f\left(b-\frac{b-a}{n}\right)$$

Vergleicht man nun in dieser Reihe von Functio werthen von $f(a)$ bis $f(b)$ je zwei benachbarte, muss, da diese letztgenannten entgegengesetzte chen haben, es ein oder drei oder fünf mal u. s also wenigstens Einmal vorkommen, dass zwei einander folgende Functionen entgegengesetzte chen haben. Sey dies der Fall bei

$$f(a+k\frac{b-a}{n}) \text{ und } f(a+(k+1)\frac{b-a}{n})$$

er abgekürzt bei

$$f(a') \quad \text{und} \quad f(b'),$$

können wir wieder die Differenz $b'-a'$, die offen-
r $= \frac{b-a}{n}$, in n gleiche Theile theilen, so dass ei-
r dieser Theile

$$= \frac{b'-a'}{n} = \frac{b-a}{n^2} \text{ wird.}$$

nn liegt zwischen $f(a')$ und $f(b')$ eine ganz ähnliche
lge von Functionen als die vorher zwischen $f(a)$
d $f(b)$ angegebene, und auch hier werden minde-
ns einmal zwei benachbarte Functionen entgegen-
setzte Zeichen haben müssen. Sind die ihnen zu-
hörigen Werthe von x, a'', b'', so wird man dann
der die Differenz $b''-a''$ in n gleiche Theile thei-
, so dass ein Theil

$$= \frac{b''-a''}{n} = \frac{b'-a'}{n^2} = \frac{b-a}{n^3},$$

l die vorige Schlussweise wiederholen. Da man
hiermit beliebig weit fortfahren kann, so wird
n auf Functionen

$$f(a^{(p)}) \quad \text{und} \quad f(b^{(p)})$$

nmen, in welchen $a^{(p)}$ und $b^{(p)}$ so beschaffen
d, dass

$$\frac{b^{(p)}-a^{(p)}}{n} = \frac{b-a}{n^{p+1}}$$

ch beliebige Vermehrung von n und p kleiner als
e gegebene Grösse gemacht werden kann, und da
r) eine ganze, mithin stetige Function ist, so gilt
s auch von dem Unterschied der absoluten Werthe
Functionen $f(a^{(p)})$ und $f(b^{(p)})$ selbst, die sich
o ohne Ende einer gemeinschaftlichen Grenze nä-
n, die durch $f(\alpha)$ bezeichnet werden mag. Da
die vorerwähnten Functionen, wie nahe sie auch

dieser Grenze kommen mögen, doch immer noch et
gegengesetzte Zeichen haben, so kann $f(\alpha)$ nur N
seyn, d. h. es giebt in der That einen zwischen a u
b liegenden reellen Wurzelwerth der Gleichung $f(x)=$

Drittens endlich stellt man die Function $f($
durch eine Curve dar, so leuchtet unmittelbar e
dass wenn $f(a)$ und $f(b)$ entgegengesetzte Ordina
sind, wegen des stetigen Zusammenhangs der Cu
zwischen den Grenzen a und b es irgendwo wenigst
Einen wirklichen Durchschnitt derselben mit der A
scissenaxe geben muss, den also $x=\alpha$, welc
$f(x)=0$ macht, bezeichnet; dass aber ebensowohl
Abscissenaxe von der Curve in 3, 5 u. s. f. Punc
geschnitten werden kann.

§. 108.

Aus vorstehendem Satze lassen sich mehrere u
mittelbare Folgerungen ziehen.

Ist nämlich zuerst das letzte Glied a_m einer Gl
chung $f(x)=0$ *negativ*, so reducirt sich $f(x)$
$x=0$ auf den negativen Werth a_m. Setzen wir a
$x=l$, gleich der oberen Grenze der positiven W
zeln, so wird $f(x)$ positiv. Daher *muss* zwische
und l mindestens Eine, es *kann* aber auch eine
gerade Zahl reeller Wurzeln dazwischen liegen.
tzen wir $x=-g$, gleich der untern Grenze der
gativen Wurzeln, so wird $f(x)$ nur dann positiv, w
der Grad der Gleichung *gerade* ist, dann also li
auch zwischen 0 und $-g$ nothwendig eine reelle
gative Wurzel.

Ist das letzte Glied a_m einer Gleichung $f(x)=$
positiv, so reducirt sich $f(x)$ für $x=0$ auf den p
tiven Werth a_m. Setzen wir dann $x=-g$, glei
der untern Grenze der negativen Wurzeln, so w
$f(x)$ nur dann negativ, wenn der Grad der Gleich
ungerade ist. In diesem Falle hat also die Gleich

ndestens Eine oder auch drei, fünf u. s. f. reelle
d zwar negative Wurzeln. Es ergeben sich also
raus folgende Sätze:

1) Jede Gleichung von *ungeradem* Grade, deren
ztes Glied *negativ* ist, hat mindestens *eine reelle*
sitive Wurzel.

2) Jede Gleichung von *geradem* Grade, deren
ztes Glied *negativ* ist, hat mindestens *zwei reelle*
urzeln, eine *positive* und eine *negative*.

3) Jede Gleichung von *ungeradem* Grade, deren
tztes Glied *positiv* ist, hat mindestens *eine reelle*
gative Wurzel.

4) Eine Gleichung von *geradem* Grade, deren
tztes Glied *positiv* ist, kann möglicherweise nur ima-
näre Wurzeln haben.

Aus diesen vier Nummern folgt als gemeinschaft-
hes Resultat:

5) Jede Gleichung, deren letztes Glied $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$
, hat immer eine $\begin{Bmatrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{Bmatrix}$ Anzahl reeller positiver
urzeln, wo auch Null mit zu den geraden Zahlen
rechnet ist.

§. 109.

Alle diese Sätze lassen sich auch eben so leicht
is der Zusammensetzung der Coefficienten aus den
urzeln (nach §. 88) ableiten. Denn da

$$a_m = (-1)^m \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots . \alpha_m,$$

id diejenigen unter diesen Wurzeln, welche imagi-
ir sind, immer ein positives Product geben, mithin,
enn μ die Zahl der reellen Wurzeln und $\varphi(\alpha)$ das
roduct der imaginären bedeutet,

$$a_m = (-1)^\mu \ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_\mu \ \varphi(\alpha)$$

ird, so kann, da $m-\mu$ immer eine gerade Zahl ist
vegen des paarweisen Vorkommens der imaginären),
ir ein *ungerades* m, a_m nur dann *negativ* seyn,

wenn μ *ungerade*, also mindestens $=1$, und α_1, α, ... α_μ in gerader Anzahl negativ, so dass also mi- destens *Einer* dieser Werthe *positiv* bleibt. Es kan unter gleicher Voraussetzung a_m nur dann *posit* seyn, wenn μ *ungerade*, und α_1, α_2 ... α_μ in unger. der Anzahl negativ, so dass mindestens *Eine neg*- *tive* reelle Wurzel vorhanden seyn muss. Ist m *g*- *rade*, so muss auch μ *gerade* seyn. Damit dann α *negativ* sey, muss die Zahl der reellen negative mithin auch die der positiven *ungerade* seyn, mith *wenigstens eine positive und eine negative* vorko- men. Ist aber a_m *positiv*, so können α_1, α_2, ... nur in gerader Zahl positiv, also ebenfalls in gerad Zahl negativ seyn, oder es können nur positive od nur negative oder auch gar keine reelle Wurzeln vo kommen.

Endlich kann zur Erläuterung dieser Sätze au die Darstellung von $f(x)$ als Curve dienen. Denn a_m den positiven oder negativen Abstand andeutet, welchem die Curve die Ordinatenaxe schneidet, inde für $x=0$ sich $f(x)$ auf a_m reducirt, ferner $f(l)$ (v l die obere positive Grenze) immer positiv, dageg $f(-g)$ (wo $-g$ die untere negative Grenze) positiv od negativ, je nachdem der Grad der Gleichung gera oder ungerade, so hat für ein ungerades m und neg- tives a_m die Curve in den Puncten 0 und $-g$ neg- tive Ordinaten, in l aber eine positive und muss c- her wenigstens zwischen 0 und l die Abscissena Einmal oder allgemein in ungerader Anzahl schn- den; ist aber a_m positiv, so ist die zu 0 gehörige C- dinate positiv und daher ein Durchschnitt oder eine u- gerade Anzahl solcher zwischen 0 und $-g$ nothwe- dig vorhanden. Ist m gerade und a_m negativ, so si die zu l uud $-g$ gehörigen Ordinaten positiv, dag- gen die für 0 negativ; es muss also die Abscissena sowohl zwischen 0 und l als zwischen 0 und $-g$ v-

ngstens Einmal geschnitten werden. Ist aber m gerade und a_m positiv, so folgt, da hier alle drei Punkte, auf deren Lage es ankommt, sich auf einer und derselben Seite der Abscissenaxe befinden, kein einziger Durchschnitt mit Nothwendigkeit. Sind aber dergleichen vorhanden, so müssen sie in gerader Anzahl vorkommen.

§. 110.

Der in §. 107 ausgesprochene und mehrfach bewiesene Satz sagt nur aus, unter welchen Bedingungen zwischen zwei gewählten Zahlen a und b *wenigstens* Eine reelle Wurzel liegen muss. Es wird aber in der Folge nöthig seyn, sich zu überzeugen, dass nur *Eine* Wurzel dieser Art zwischen zwei solchen Zahlgrenzen vorkomme. Hiervon wird man jedesmal versichert seyn, wenn man weiss, dass die Differenz $b-a$ kleiner als der kleinste Unterschied je zweier Wurzeln der Gleichung ist. Denn liege dann a oder b der Wurzel α auch noch so nahe, so wird doch immer, wenn eine nächstbenachbarte Wurzel β heisst, weil nach der Voraussetzung $b-a < \beta-\alpha$ und um so mehr $b-\alpha<\beta-\alpha$, $b<\beta$ seyn, das heisst, b näher bei α liegen als β. Wäre daher diese kleinste Differenz gefunden, und bedeutet l die obere Grenze der positiven, $-g$ die untere Grenze der negativen Wurzeln, so werden, wenn man die Werthe

$$-g, \ldots -3\Delta, -2\Delta, -\Delta, \ 0, \ \Delta, \ 2\Delta, \ 3\Delta; \ldots \ l$$

bildet, in denen Δ eine Grösse bedeutet, die nicht grösser als die erwähnte kleinste Differenz der Wurzeln ist, diese Werthe der Reihe nach in $f(x)$ substituirt und die Vorzeichen der Ergebnisse vergleicht, in dieser Werthreihe so viele Zeichenwechsel vorkommen als die Gleichung reelle und ungleiche Wurzeln hat. Die gleichen Wurzeln können aber jedesmal zuvor nach §. 92 aufgefunden und die ihnen zugehöri-

gen quadratischen Factoren durch Division aus $f(x)$ entfernt werden.

§. 111.

Um nun diese Grösse Δ zu finden, suchen wir zuerst eine Gleichung, deren Wurzeln die Differenzen oder irgend welche Potenzen der Differenzen der Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ sind. Bestimmen wir dann die untere Grenze der Wurzeln dieser neuen Gleichung, so wird daraus Δ unmittelbar sich ableiten lassen.

Seyen nämlich die Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ wieder

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_m,$$

so sind die Differenzen je zweier immer auf doppelte Art möglich, indem man sie z. B. durch $\alpha_1-\alpha_2$ und $\alpha_2-\alpha_1$, $\alpha_1-\alpha_3$ und $\alpha_3-\alpha_1$ u. s. f. darstellen kann. Da nun jede Wurzel mit jeder andern zur Differenz verbunden werden kann, so ist die Zahl der letzten überhaupt $=m(m-1)$ und die Gleichung, deren Wurzeln jene Differenzen sind, wird von demselben Grade seyn. Nennen wir daher die Unbekannte der neuen Gleichung z, so wird jene aus $m(m-1)$ Factoren bestehen, von denen je zwei immer die Summe und die Differenz derselben Grössen darstellen, nämlich aus den Factoren

$$z-(\alpha_1-\alpha_2), z+(\alpha_1-\alpha_2);\ z-(\alpha_1-\alpha_3), z+(\alpha_1-\alpha_3);$$
$$z-(\alpha_2-\alpha_3), z+(\alpha_2-\alpha_3);\ z-(\alpha_2-\alpha_4), z+(\alpha_2-\alpha_4);$$

u. s. f.

oder, wenn man je zwei zusammengehörige Factoren verbindet, aus den quadratischen Factoren

$$z^2-(\alpha_1-\alpha_2)^2, z^2-(\alpha_1-\alpha_3)^2, \ldots$$
$$z^2-(\alpha_2-\alpha_3)^2, z^2-(\alpha_2-\alpha_4)^2;$$

u. s. f.

Setzen wir daher $z^2=w$ und $m(m-1)$, welches immer eine gerade Zahl ist $=2\mu$, so entsteht durch Mu ltiplication vorstehender quadratischer Factoren ein

leichung für w vom Grade μ, welche folgende orm hat:

$$w^{\mu}+c_1 w^{\mu-1}+c_2 w^{\mu-2}+\ldots+c_{\mu}=0,$$

nd deren Wurzeln *die Quadrate der Differenzen* er Wurzeln der ursprünglichen Gleichung $f(x)=0$ nd diese Differenzen nicht auf doppelte Weise genommen sind.

Da nun aber die Wurzeln der letztern unbekannt nd, so muss man die Coefficienten c_1, c_2, c_3 u. s. f. er Gleichung für w unmittelbar aus den Coefficienten a_1, a_2, a_3 u. s. f. der gegebenen Gleichung abzleiten im Stande seyn. Dies kann mittels der in . 95 enthaltenen Newton'schen Relationen zwischen oefficienten und Potenzen der Wurzeln geschehen. etzen wir nämlich die Summe der $r$ten Potenzen der Vurzeln der Gleichung für w, $=\Sigma_r$, so dass also, enn wir die Wurzeln durch γ_1, γ_2, γ_3 u. s. f. bezichnen,

$$\Sigma_r=\gamma_1^r+\gamma_2^r+\gamma_3^r+\cdots\gamma_{\mu}^r,$$

ist zuerst, nach §. 96, 1.

$$c_1 = -\Sigma_1;$$

$$c_2 = -\frac{c_1\Sigma_1+\Sigma_2}{2};$$

$$c_3 = -\frac{c_2\Sigma_1+c_1\Sigma_2+\Sigma_3}{3};$$

$$c_4 = -\frac{c_3\Sigma_1+c_2\Sigma_2+c_1\Sigma_3+\Sigma_4}{4}$$

u. s. f.

Diese Summen der Wurzelpotenzen der Gleichung für w lassen sich aber weiter aus den Summen der Potenzen der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung $f(x)=0$ berechnen. Wir können nämlich setzen

$$\Sigma_r=(\alpha_1-\alpha_2)^{2r}+(\alpha_1-\alpha_3)^{2r}+\ldots$$
$$+(\alpha_2-\alpha_3)^{2r}+(\alpha_2-\alpha_4)^{2r}+\ldots+(\alpha_3-\alpha_4)^{2r}+\ldots$$

oraus, wenn wir jede Differenz mit Umkehrung ihrer lieder wiederholen, sich ergiebt

$$2\Sigma_r=(\alpha_1-\alpha_2)^{2r}+(\alpha_1-\alpha_3)^{2r}+\ldots$$
$$+(\alpha_2-\alpha_1)^{2r}+(\alpha_2-\alpha_3)^{2r}+$$
$$+(\alpha_3-\alpha_1)^{2r}+(\alpha_3-\alpha_2)^{2r}+\ldots+(\alpha_4-\alpha_1)^{2r}+(\alpha_4-\alpha_2)^{2r}+$$
. . . .

Stellen wir das allgemeine Glied dieses Ausdruc durch $(\alpha_i-\alpha_k)^{2r}$ dar, so wird man sowohl i als k al successive ganzen Werthe von 1 bis m zu geben h ben, da die obigen Differenzen offenbar von den St lenzahlen 1, 2, 3...m alle möglichen Verbindungen zweien, nebst deren Versetzungen enthalten. Es i aber, wenn wir die Binomialcoefficienten nach Eul bezeichnen, so dass

$$\binom{2r}{n}=\frac{2r(2r-1)\ldots(2r-n+1)}{1.2\ \ldots.\ n},$$

$$(\alpha_i-\alpha_k)^{2r}=\alpha_i^{2r}-\binom{2r}{1}\alpha_i^{2r-1}\alpha_k+\binom{2r}{2}\alpha_i^{2r-2}\alpha_k^2-\ldots+\alpha_k^{2r}$$

daher die Summe aller Ausdrücke, die man, ohne einen besondern Werth zu geben, für $i=1, 2, 3,\ldots$ erhält, wenn die Potenzen der Wurzeln nach §. bezeichnet werden,

$$=S_{2r}-\binom{2r}{1}S_{2r-1}\alpha_k+\binom{2r}{2}S_{2r-2}\alpha_k^2-\ldots$$
$$-\binom{2r}{2r-1}S_1\alpha_k^{2r-1}+\alpha_k^{2r}$$

folglich, wenn nun successiv $k=1, 2, 3\ldots m$ geset und die Summe dieser Werthe genommen wird,

$$2\Sigma_r=mS_{2r}-\binom{2r}{1}S_{2r-1}S_1+\binom{2r}{2}S_{2r-2}S_2-\ldots$$
$$-\binom{2r}{2r-1}S_1S_{2r-1}+mS$$

Da nun bekanntlich allgemein $\binom{2r}{h}=\binom{2r}{2r-h}$ so sind die gleich weit vom Anfang und Ende dieser Rei entfernten Glieder vollkommen identisch. Zugleich h die Reihe ein mittleres, also nur einfach vorkommend Glied, nämlich das Glied $(-1)^r\binom{2r}{r}.\ S_rS_r.$

Es wird daher

$$S_r = m S_{2r} - \binom{2r}{1} S_{2r-1} S_1 + \binom{2r}{2} S_{2r-2} S_2 - \dots + (-1)^r \binom{2r}{r} \cdot \tfrac{1}{2} S_r S_r.$$

ermit sind die Summen der Potenzen der Wurzeln r Gleichung

$$w^\mu + c_1 w^{\mu-1} + c_2 w^{\mu-2} + \dots + c_\mu = 0$$

f die Summen der Potenzen der Wurzeln von $f(x)=0$ rückgeführt. Wie nun diese aus den Coefficienten r letzteren Gleichung durch recurrirende oder inde-ndente Formeln sich finden lassen, ist in §. 93 ge-rt worden.

§. 112.

Da die Wurzeln der Gleichung

$$w^\mu + c_1 w^{\mu-1} + c_2 w^{\mu-2} + \dots + c_\mu = 0,$$

ren Coefficienten nunmehr bekannt sind, *Quadra-* darstellen, so werden diese nur dann negativ seyn, nn die Gleichung $f(x)=0$ imaginäre Wurzeln thält. Hat sie aber reelle, also von einander mit-ls der Grösse $\varDelta$ abzusondernde Werthe, so hat die ige Gleichung nach w positive Wurzeln. Nennen r in diesem Falle die obere Grenze derselben l', so t ihre untere (nach §. 105) $= \frac{1}{l'}$; es ist also $\frac{1}{l'}$ klei-

r als $(\alpha_1-\alpha_2)^2$, $(\alpha_1-\alpha_3)^2$ u. s. f. mithin $\frac{1}{\sqrt{l'}}$ klei-r als $\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_1-\alpha_3$ u. s. f. Demnach ist die in §. 110 r Trennung der einzelnen reellen Wurzeln der Glei-ung $f(x)=0$ eingeführte Grösse

$\varDelta \overline{\overline{<}} \frac{1}{\sqrt{l'}}$ anzunehmen. Ist daher $l'<1$, so wird man immer $\varDelta=1$ setzen können, was ie Rechnung sehr vereinfacht.

Diese Gleichung nach w kann übrigens auch b-
nutzt werden, das Vorhandenseyn gleicher oder im-
ginärer Wurzeln in der ursprünglichen Gleichung nac-
zuweisen. Hat diese nämlich zwei oder mehrere gl-
che Wurzeln, so werden eben so viele Quadrate d-
Differenzen ihrer Wurzeln, d. i. eben so viele Wu-
zeln der Gleichung nach w null; die letztere muss al-
eben so viel mal den Factor $(w-0)=w$ enthalte-
und umgekehrt das Vorhandenseyn eines solchen meh-
fachen Factors ist die Anzeige einer eben so oft
$f(x)=0$ vorkommenden Wurzel.

Sind ferner die Wurzeln von $f(x)=0$ durchgä-
gig reell, also die der Gleichung nach w sämmtli-
positiv, so kann letztere Gleichung nur Zeiche-
wechsel haben. Enthält sie daher Zeichen*folgen*, m-
hin nicht blos positive Wurzeln, so kommen in d-
Gleichung $f(x)=0$ nothwendig imaginäre Wurze-
vor, von denen die Quadrate der Differenzen alle-
dings negativ seyn können.

§. 113.

Um die vorbeschriebene Methode zur Begrenzu-
der einzelnen reellen Wurzeln der Gleichungen an -
nem Beispiele ausführlich zu erläutern, sey

$$f(x)=x^4-4x^2+4x-1=0;$$

worin also

$$a_1=0;\ a_2=-4;\ a_3=4;\ a_4=-1;\ m=4;$$

daher $\mu=6$, folglich Σ_1, $\Sigma_2 \ldots$ bis Σ_6 zu berechne-
Hierzu bedarf man der Werthe S_1, $S_2, \ldots S_{12}$. E-
findet sich aber aus §. 93 und 94

$$S_1=0; S_2=8; S_3=-12; S_4=36; S_5=-80; S_6=20$$
$$S_7=-476;\ S_8=1156;\ S_9=-2287;\ S_{10}=6728;$$
$$S_{11}=-16236;\ S_{12}=3920$$

Hieraus folgt nun weiter durch Anwendung der Fo-
meln am Ende von §. 111

$$\Sigma_1=32;\ \Sigma_2=336;\ \Sigma_3=3680;\ \Sigma_4=41024;$$
$$\Sigma\ =463232;\ \Sigma_6=5280000;$$

raus denn endlich, nach den Formeln im ersten heil von §. 111, sich ergiebt

$c_1=-32$; $c_2=344$; $c_3=-1312$; $c_4=784$;

$c_5=-128$; $c_6=0$;

so

$$w^6-32w^5+344w^4-1312w^3+784w^2-128w=0.$$

ı w hier Factor des linken Theils der Gleichung, zeigt dies zwei gleiche Wurzeln der ursprünglichen . In der That bildet man die Derivation von $f(x)$ d sucht den gemeinschaftlichen Factor von $f(x)$ und (x), so findet er sich $=x-1$; also ist 1 die zweimal rkommende Wurzel von $f(x)=0$. Hiermit ist nun e vorliegende Gleichung sogleich auf eine quadratihe reducirt und daher ihre Wurzeln als gefunden betrachten.

Als zweites Beispiel sey

$$f(x) = x^3-2x-5=0;$$

so $\quad a_1=0$; $a_2=-2$; $a_3=-5$; $m=3$;

lglich $\mu=3$ und daher Σ_1 bis Σ_3 zu berechnen, ozu die Werthe S_1 bis S_6 erforderlich sind, so finet sich

$S_1=0$; $S_2=4$; $S_3=15$; $S_4=8$; $S_5=50$; $S_6=91$,

d hieraus

$$\Sigma_1=12;\ \Sigma_2=72;\ \Sigma_3=-1497;$$

dlich

$$c_1=-12;\ c_2=36;\ c_3=643,$$

d also

$$w^3-12w^2+36w+643=0.$$

ilden wir hiervon die Derivationen

$$3(w^2-8w+12);$$

$$2(w-4);$$

findet sich nach Newton's Methode für die obere renze der Werth

$$l'=6.$$

Es könnte also $\Delta \overline{\overline{<}} \frac{1}{\sqrt{6}} \overline{\overline{<}} \frac{1}{2{,}4}$, also z. B.

$=\frac{1}{2,5}=0,4$ gesetzt werden. Allein da vorstehen
Gleichung für w eine Zeichenfolge, also $f(x)=0$ zwi
imaginäre Wurzeln enthält, also nur eine einzige reel
hat, so kann man sich begnügen, die benachbart
ganzen Zahlen zu suchen, zwischen denen diese lie
weil man im Voraus weiss, dass keine andre reel
ausserdem zwischen denselben Zahlen liegen kan
Wir setzen daher

für $0,\ \Delta,\ 2\Delta,\ 3\Delta,$
beziehlich $0,\ 1,\ 2,\ 3,$

und bleiben hier stehen, weil sich als Grenze d
Wurzeln von $f(x)=0$, $l=3$ ergiebt. Die Substit
tion dieser Werthe giebt

$$f(x)=-5;\ -6;\ -1;\ 16;$$

die reelle Wurzel der Gleichung liegt also zwisch
2 und 3.

§. 114.

Sind auf diese Weise die Grenzen jeder einze
nen reellen Wurzel bestimmt und damit zugleich d
Zahl der reellen Wurzeln überhaupt gefunden, s
giebt der Rest, den man erhält, wenn man diese Za
von dem Grade der Gleichung abzieht, die Menge d
imaginären Wurzeln an. Indess schon die vorstehe
den einfachen Beispiele können die Weitläufigkeit u
daher praktische Untauglichkeit dieser von Warin
und Lagrange*) empfohlenen Methode der Unte
scheidung der reellen Wurzeln mittels der *Gleichun
ihrer Differenzen* belegen. Diese steigert sich au
serordentlich und veranlasst eine Menge unnützer Su
stitutionen und Rechnungen, wenn Δ so klein gefu
den wird, dass es, auch wenn die Gleichung nur seh
wenige Wurzeln hat, zwischen den äussersten Gre

---

*) S. dessen *Résolution des équations numériques, chap. I.* un
Note III.

n derselben sehr vielmal enthalten ist. Was neuer-
ch, zur bequemern Bestimmung von Δ, durch Cau-
ny*) geschehen, kann ebenfalls nicht als allgemein
enügend angesehen werden, indem man bei der An-
endung meistens auch in eine weitläufige Rechnung
rwickelt wird. Es ist daher Bedürfniss, die Errei-
nung des Zwecks auf einem andern Wege zu versu-
nen. Dies soll in dem folgenden Abschnitt ge-
hehen.

**) *Analyse algébrique T. I. Note III. p.* 484.

Siebenter Abschnitt.

Von den ältern Methoden zur Unterscheidung der reellen und imaginären Wurzeln.

§. 115.

Seyen wieder α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots \alpha_\mu$ die ungleiche reellen Wurzeln der Gleichung vom $m$ten Grad $f(x)=0$, und zwar ihrer Grösse nach absteigend geordnet, so dass also $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ u. s. f.; so wird, wenn $\varphi(x)$ das Product aus den imaginären Factoren von $f(x)$ bedeutet,

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_\mu)\varphi(x)$$

und hieraus

$$\begin{aligned} f'(x) = \Big\{ & (x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_\mu) \\ & +(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_\mu) \\ & +(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_\mu) \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ & +(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{\mu-1})\Big\}\varphi(x) \\ & +(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_\mu)\varphi'(x). \end{aligned}$$

Setzen wir jetzt der Reihe nach $x=\alpha_1$, $\alpha_2 \ldots \alpha_\mu$ so wird, da $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$ u. s. f. und $\varphi(x)$ für jeden Werth von x positiv,

$$f'(\alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \ldots (\alpha_1 - \alpha_\mu)\varphi(\alpha_1) > 0;$$
$$f'(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3) \ldots (\alpha_2 - \alpha_\mu)\varphi(\alpha_2) < 0;$$
$$f'(\alpha_3) = (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2) \ldots (\alpha_3 - \alpha_\mu)\varphi(\alpha_3) > 0;$$

u. s. f.

dass allemal die Substitution der Wurzeln mit {geraden / eraden} Stellenzahlen {positive / negative} Werthe von $f'(x)$ bt. Bilden wir daher die Gleichung $f'(x) = 0$, so aus Vorstehendem vermöge §. 107 klar, dass die llen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ paarweise enzen von reellen Wurzeln der abgeleiteten Gleiung $f'(x) = 0$ sind. Nennen wir die hieraus folgen- n $\mu - 1$ reellen Wurzeln der letztern $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_{\mu-1}$, folgt, wenn wir von dieser zu der zweiten derivir- Function $f''(x)$ übergehen, ganz auf dieselbe eise, dass

$$f''(\alpha'_1) > 0;$$
$$f''(\alpha'_2) < 0;$$
$$f''(\alpha'_3) > 0 \text{ u. s. f.,}$$

dass also die reellen Wurzeln der Gleichung $x) = 0$ wieder reelle Wurzeln der derivirten $f''(x) = 0$ ischen sich enthalten. Man kann diesen Schluss enbar auf jede folgende derivirte Gleichung ausdeh- n und daher allgemein den Satz aufstellen: *je zwei chste reelle Wurzeln einer jeden derivirten Gleiung schliessen eine reelle Wurzel der nächstfol- nden derivirten Gleichung ein und können daher zu renzen derselben dienen.*

§. 116.

Im vorhergehenden §. lässt sich, nach §. 107, ht mehr schliessen, als dass zwischen je zwei nächn reellen Wurzeln einer Gleichung $f(x) = 0$ *wenigns* Eine reelle der derivirten $f'(x) = 0$ liegen müs-; aber es ist damit nicht die Möglichkeit ausgehlossen, dass *mehr als Eine* reelle Wurzel der zteren dazwischen enthalten seyn kann, indem all-

gemein jede ungerade Anzahl von Wurzeln zuläss
ist. Dass jedoch umgekehrt zwischen je zwei näc
sten reellen Wurzeln der derivirten Gleichung n
mehr als Eine reelle der ursprünglichen liegt, u
dass unter den reellen Wurzeln der letzteren nie me
als Eine grösser als die grösste und nie mehr als Ei
kleiner als die kleinste reelle Wurzel der derivirt
Gleichung seyn kann, lässt sich erweisen.

Denn gesetzt, es fielen zwischen die beiden b
nachbarten Wurzeln der derivirten Gleichung α'_1 u
α'_2 die *zwei* reellen der ursprünglichen α_2 und α_3,
würde, da zwischen diese nothwendig wenigstens Ei
reelle von $f'(x)=0$ fallen muss, letztere offenb
zwischen α'_1 und α'_2 liegen, folglich würden die
Wurzeln, gegen die Voraussetzung, keine nächstb
nachbarten seyn. Dagegen führt es auf keinen W
derspruch, zwischen α'_1 und α'_2 keine Wurzel der u
sprünglichen Gleichung anzunehmen. Eben so, we
α_1 und α_2, die beiden grössten Wurzeln von $f(x)=$
beide zugleich grösser wären als α'_1, die grösste ree
von $f'(x)=0$, so müsste zwischen ersteren wenigste
Eine reelle der letzteren Gleichung liegen, welche a
grösser als α'_1 wäre, gegen die Voraussetzung, na
der diese die grösste reelle Wurzel der derivirten Gl
chung ist. Aus ganz gleichen Gründen kann au
nicht mehr als Eine reelle Wurzel der ursprünglich
kleiner als die kleinste reelle der derivirten Gleichu
seyn. In beiden Fällen kann aber ganz wohl $f(x)=$
gar keine Wurzel besitzen, die grösser oder klei
wäre als die grösste oder kleinste von $f'(x)=0$. V
vollständigen wir nun hiernach den Satz des vorh
gehenden §., so ist er auf folgende Weise zu fass

1) *Zwischen je zwei nächsten reellen Wurz
der ursprünglichen Gleichung liegt wenigstens E
reelle der derivirten; doch können auch* 3, 5 *u. s
allgemein jede ungerade Anzahl von Wurzeln d
zwischen fallen.*

2) *Zwischen je zwei nächsten reellen Wurzeln 'er derivirten Gleichung liegt nicht mehr als Eine eelle der ursprünglichen; doch kann auch gar eine dazwischen fallen.*

3) *Nicht mehr als Eine reelle Wurzel der ur-rünglichen Gleichung kann grösser als die grösste eelle Wurzel der derivirten; nicht mehr als Eine eelle der ursprünglichen Gleichung kleiner als ie kleinste reelle Wurzel der derivirten seyn; doch ann auch gar keine reelle Wurzel der ursprüng-chen über der grössten und unter der kleinsten eellen Wurzel der derivirten Gleichung liegen.*

In diesem letzteren Falle wird, wie aus der Ver-indung mit der zweiten Hälfte von 2) folgt, die rösste Wurzel der ursprünglichen Gleichung zwischen er 1sten und 2ten oder zwischen der 2ten und 3ten, er 3ten und 4ten u. s. f. der derivirten Gleichung egen können*).

§. 117.

Wir ziehen hieraus sogleich einige Folgerungen, ie wir als die Ergebnisse anderer Untersuchungen ereits kennen gelernt haben.

Erstens: Da in der Gleichung $f(x)=0$ zwischen e zwei reellen Wurzeln immer eine reelle Wurzel er derivirten $f'(x)=0$ liegt, jene beiden ersten Wur-eln mögen übrigens um viel oder wenig verschieden eyn, so wird, wenn beide einander gleich werden, uch die zwischenliegende Wurzel mit ihnen zusam-enfallen; d. i. wenn die Stammgleichung zwei glei-he reelle Wurzeln besitzt, so hat die abgeleitete ine ihnen gleiche Wurzel. Aus gleichen Gründen ird, wenn die ursprüngliche Gleichung drei gleiche

---

*) Nach Lagrange's *Résolution de l'équat. numér. Not. VIII.* ann als erster Erfinder der in den beiden vorstehenden §§. vorge-agenen Sätze Rolle angesehen werden.

Wurzeln hat, die zweite abgeleitete einen, die ers abgeleitete Gleichung zwei Wurzeln besitzen, die s wohl unter sich als auch jenen ersteren gleich sin u. s. w., was schon aus §. 92 bekannt ist.

Zweitens: Sey p die Zahl der reellen positiv Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$, n die der negative also $p+n$ die der reellen überhaupt. Dann hat d Gleichung $f'(x)=0$ vermöge §. 116, 1 wenigste $p+n-1$ reelle Wurzeln, unter denen jedenfalls $p-$ positive und $n-1$ negative seyn werden; das Zeich der noch übrigen Wurzel bleibt unentschieden, da s von der obersten negativen und untersten positiv Wurzel begrenzt wird, und daher sowohl positiv a negativ seyn kann. Wenn also überhaupt die Gl chung $f(x)=0$ mehr reelle Wurzeln hat als $f'(x)=$ so kann sie nur Eine positive oder negative Wurz mehr haben, so dass, wenn die Anzahl der positiv oder der negativen Wurzeln der letzteren Gleichu $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\\text{ungerade}\end{matrix}\right\}$, die der ersteren $\left\{\begin{matrix}\text{ungerade}\\\text{gerade}\end{matrix}\right\}$ ist. Nach §. 10 hat aber eine Gleichung eine $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\\text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ Anzahl posi ver Wurzeln, je nachdem ihr letztes Glied $\left\{\begin{matrix}\text{positi}\\\text{negat}\end{matrix}\right\}$ ist. Soll also $f(x)=0$ Eine positive Wurzel mehr a $f'(x)=0$ haben, so müssen die Zeichen der letzt Glieder der linken Theile beider entgegengesetzt se Sind diese Zeichen aber gleichartig, so kann die stere Gleichung nur eine negative Wurzel mehr a die abgeleitete haben. Dasselbe gilt von der Vergl chung der Gleichungen $f'(x)=0$ und $f''(x)=$; $f''(x)=0$, und $f'''(x)=0$ u. s. w. Die letzten Glie der Gleichungen

$$f(x)=0,\ f'(x)=0,\ f''(x)=0,\ \text{u. s. f.,}$$

sind aber beziehungsweise

$$f(0),\ f'(0),\ f''(0),\ \text{u. s. f.}$$

welche Zeichen so zu verstehen sind, dass *nach* Bildung der ihnen entsprechenden allgemeinen F

ionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ u. s. f. $x=0$ zu setzen ist. ie Gleichung $f(x)=0$ kann aber (nach §. 90) auch eschrieben werden

$$x^m + \frac{f^{(m-1)}(0)}{1.2\ldots(m-1} x^{m-1} + \frac{f^{(m-2)}(0)}{1.2\ldots(m-2)} x^{m-2} + \ldots$$
$$+ \frac{f''(0)}{1.\ 2} x^2 + \frac{f'(0)}{1} x + f(0) = 0.$$

as, was von den letzten Gliedern der Gleichungen $x)=0$, $f'(x)=0$ u. s. f. gesagt wurde, trägt sich so auch auf die Coefficienten a_m, a_{m-1}, a_{m-2} u. s. f. r Gleichung $f(x)=0$ über, indem die hinzukom-enden Nenner 1, 1.2, 1.2.3 u. s. w. sämmtlich po-iv sind. Es kann also $f(x)=0$ eine $\left\{\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{negative}\end{matrix}\right\}$ urzel mehr als $f'(x)=0$ haben, je nachdem a_m id a_{m-1} $\left\{\begin{matrix}\text{entgegengesetzte}\\ \text{gleichartige}\end{matrix}\right\}$ Vorzeichen besitzen, oder, e es, nach §. 97, auch ausgedrückt werden kann, je chdem a_m und a_{m-1} einen Zeichen-$\left\{\begin{matrix}\text{Wechsel}\\ \text{Folge}\end{matrix}\right\}$ bilden. is völlig gleichen Gründen kann $f'(x)=0$ eine $\left\{\begin{matrix}\text{sitive}\\ \text{gative}\end{matrix}\right\}$ Wurzel mehr als $f''(x)=0$, $f''(x)=0$ eine rgleichen mehr als $f'''(x)=0$ u. s. w. haben, je chdem a_{m-1} und a_{m-2}, a_{m-2} und a_{m-3} u. s. f. Zei-en-$\left\{\begin{matrix}\text{Wechsel}\\ \text{Folgen}\end{matrix}\right\}$ bilden. Da nun $f^{(m)}(x)=1.2\ldots m$ con-nt, also $f^{(m)}(x)=0$ keine Wurzel hat, so kann $x)=0$ nicht mehr $\left\{\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{negative}\end{matrix}\right\}$ reelle Wurzeln haben, s Zeichen-$\left\{\begin{matrix}\text{Wechsel}\\ \text{Folgen}\end{matrix}\right\}$ in dieser Gleichung vorkommen.

Dieses Resultat ist der Satz des Descartes, wie in §. 98 und 100, 1) schon ausgesprochen und auf derm Wege entwickelt worden ist.

§. 118.

Sind die Wurzeln der derivirten Gleichung be-nnt, so kann man sie benutzen, um Kennzeichen

aufzufinden, nach welchen sich entscheiden lässt, o zwischen je zweien derselben oder über der grösst und unter der kleinsten eine reelle Wurzel der ursprünglichen Gleichung liegt.

Seyen nämlich wiederum die reellen Wurzeln der ursprünglichen wie der derivirten Gleichung ihrer Grösse nach geordnet, so dass für jene

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 \ldots > \alpha_\mu,$$

für diese

$$\alpha'_1 > \alpha'_2 > \alpha'_3 \ldots > \alpha'_\lambda,$$

wenn λ die Zahl der reellen Wurzeln bedeutet, und sey, wie in §. 115,

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \ldots (x-\alpha_\mu)\varphi(x);$$

so wird

a) durch Substitution von $x=\alpha'_1$, $f(x)=f(\alpha'_1)$ *positiv*, wenn *keine* der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ grösser als α'_1, *negativ*, wenn *eine* (denn mehr sind nach §. 116,3 nicht zulässig), also wenn α_1 grösser als α'_1.

Denn sey *zuerst* α'_1 positiv, indess $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ insgesammt oder zum Theil positiv oder negativ seyn mögen: so sind, wenn keine dieser letzteren Wurzeln grösser als α'_1, sämmtliche einfache Factoren in $f(\alpha'_1)$ positiv, folglich, da $\varphi(x)$ für jeden Werth von x positiv, auch $f(\alpha'_1)$ selbst positiv. Ist aber $\alpha_1 > \alpha'_1$, so wird der erste der genannten Factoren, aber auch nur dieser, negativ, also auch $f(\alpha'_1)$ negativ.

Sey *zweitens* α'_1 negativ, so sind, wenn keine der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ grösser als α'_1, diese sämmtlich negativ und, absolut genommen, grösser als α'_1. Dann wird jeder der einfachen Factoren und mit diesen $f(\alpha'_1)$ positiv. Wenn aber, nach der zweiten Annahme, α_1 grösser als das negative α'_1, so ist es entweder positiv, oder negativ, aber absolut genommen kleiner als der absolute Werth von α'_1. In beiden Fällen ist der Factor $(\alpha'_1-\alpha_1)$ negativ. Da aber α_1 allein grösser als α'_1, so sind die übrigen

'urzeln α_2, α_3 u. s. f. mit α'_1 entschieden negativ
d dem absoluten Werthe nach grösser als das ab-
lut genommene α'_1, folglich das Product $(\alpha'_1 - \alpha_2)$.
$('_1 - \alpha_3) \ldots (\alpha'_1 - \alpha_\mu)$ positiv, mithin wiederum $f(\alpha'_1)$
gativ.

b) Wird $x = \alpha'_2$ substituirt, so hat $f(\alpha'_2)$ das
$\left\{\begin{matrix}\text{gleiche}\\ \text{tgegengesetzte}\end{matrix}\right\}$ Zeichen von $f(\alpha'_1)$, je nachdem $\left\{\begin{matrix}\text{keine}\\ \text{eine}\end{matrix}\right\}$
r Wurzeln α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_\mu$ zwischen α'_1 und α'_2 fällt.

Denn bilden wir das Product

$$f(\alpha'_1).\, f(\alpha'_2) = (\alpha'_1 - \alpha_1)(\alpha'_2 - \alpha_1)(\alpha'_1 - \alpha_2)(\alpha'_2 - \alpha_2) \ldots$$
$$\ldots (\alpha'_1 - \alpha_\mu)(\alpha'_2 - \alpha_\mu)\, \varphi(\alpha'_1).\, \varphi(\alpha'_2),$$

ist dasselbe $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$, mithin $f(\alpha'_1)$ und $f(\alpha'_2)$ von
$\left\{\begin{matrix}\text{gleichem}\\ \text{tgegengesetztem}\end{matrix}\right\}$ Zeichen, je nachdem die Factoren-
are

$$(\alpha'_1 - \alpha_1)(\alpha'_2 - \alpha_1);\ (\alpha'_1 - \alpha_2)(\alpha'_2 - \alpha_2); \ldots$$
$$\ldots (\alpha'_1 - \alpha_\mu)(\alpha'_2 - \alpha_\mu)$$

schaffen sind. Sind nun alle Wurzeln α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_\mu$
einer oder grösser als α'_1 und α'_2 zugleich, oder,
s dasselbe, liegt keine dieser Wurzeln zwischen
und α'_2, so sind sämmtliche Factorenpaare posi-
, also auch ihr Product. Fällt dagegen eine der
urzeln α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_\mu$ zwischen α'_1 und α'_2 (und mehr
Eine kann nach §. 116, 2 nicht dazwischen fallen),
wird eines der Factorenpaare negativ, indess die
dern positiv bleiben; also ist dann das Product
gativ.

c) Wenn $x = \alpha'_3$, so hat $f(\alpha'_3)$ mit $f(\alpha'_2)$ das
$\left\{\begin{matrix}\text{gleiche}\\ \text{tgegengesetzte}\end{matrix}\right\}$ Vorzeichen, je nachdem $\left\{\begin{matrix}\text{keine}\\ \text{eine}\end{matrix}\right\}$ der
urzeln α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ zwischen α'_2 und α'_3 liegt, was
en so zu erweisen ist, wie in der vorhergehenden
mmer; u. s. f.

d) Wird endlich $x = \alpha'_\lambda$ substituirt, so zeigt die
trachtung der Factoren von $f(x)$, dass, wenn keine
r Wurzeln α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ kleiner als α'_λ ist, $f(\alpha'_\lambda)$

$\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ wird, je nachdem μ $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ ist; dass abe, wenn Eine dieser Wurzeln kleiner als α'_λ (mehrere kö nen nach §. 116,3 nicht kleiner seyn), $f(\alpha'_\lambda)$ $\left\{\begin{matrix}\text{positi}\\ \text{negati}\end{matrix}\right.$ wird, je nachdem μ $\left\{\begin{matrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{matrix}\right\}$, mag übrigens α'_λ po tiv oder negativ seyn. Da nun die imaginären Wu zeln immer paarweise vorkommen, so ist μ zuglei mit m, dem höchsten Exponenten in $f(x)$, gerade u ungerade, so dass in dem eben ausgesprochenen S tze auch μ mit m vertauscht werden kann.

Vorstehende Sätze können nun auch auf folgen Weise umgekehrt werden:

1) Die Gleichung $f(x)=0$ hat $\left\{\begin{matrix}\text{eine}\\ \text{keine}\end{matrix}\right\}$ reelle Wu zel, die grösser als die grösste reelle Wurzel α'_1 d derivirten Gleichung $f'(x)=0$, je nachdem $f(\alpha'$ $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ ist.

2) Dieselbe Gleichung hat $\left\{\begin{matrix}\text{eine}\\ \text{keine}\end{matrix}\right\}$ reelle Wurz zwischen den Grenzen α'_1 und α'_2, je nachdem $f(\alpha'$ das $\left\{\begin{matrix}\text{entgegengesetzte}\\ \text{gleiche}\end{matrix}\right\}$ Zeichen mit $f(\alpha'_1)$ hat.

3) Eben dieselbe hat $\left\{\begin{matrix}\text{eine}\\ \text{keine}\end{matrix}\right\}$ reelle Wurzel zw schen den Grenzen α'_2 und α'_3, je nachdem $f(\alpha'_3)$ d $\left\{\begin{matrix}\text{entgegengesetzte}\\ \text{gleiche}\end{matrix}\right\}$ Zeichen mit $f(\alpha'_2)$ hat; u. s. f.

4) Die Gleichung $f(x)=0$ hat endlich $\left\{\begin{matrix}\text{ein}\\ \text{kei}\end{matrix}\right.$ reelle Wurzel, die kleiner als α'_λ, die kleinste ree Wurzel der derivirten Gleichung $f'(x)=0$, je na dem $f(\alpha'_\lambda)$ für ein *gerades* m $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$, für ein *ung rades* m $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist.

Die Beweise dieser Sätze erfolgen durch Betra tungen, welche den vorhergegangenen unter a) bis vollkommen parallel laufen. Diese vier Sätze n dienen zu dem im Anfange dieses Paragraphs bezei neten Zwecke.

§. 119.

Sind die m Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ ımmtlich reell, so hat auch die derivirte durchaus ːelle Wurzeln. Denn da nach §. 116, 1 zwischen zwei benachbarten reellen Wurzeln von $f(x)=0$ enigstens Eine reelle von $f'(x)=0$ liegt, so ergeben ch hieraus für letztere, welche vom $(m-1)$ten Grade t, $m-1$ reelle Wurzeln, nicht mehr und nicht minier. Auf dieselbe Weise folgt nun auch, dass auch ie zweite, dritte derivirte u. s. f. dann durchgängig eelle Wurzeln haben. *Hat also die ursprüngliche Gleichung nur reelle Wurzeln, so haben auch ämmtliche derivirte durchgängig reelle.*

Dagegen können umgekehrt die derivirten Gleihungen blos reelle Wurzeln besitzen, ohne dass daselbe von der ursprünglichen gilt, wie aus §. 116, 2 nd 3 erhellt. Dies kann auch so ausgedrückt weren: *die ursprüngliche Gleichung kann imaginäre Wurzeln haben, indess die Wurzeln der derivirен durchgängig reell sind.*

Dass aber umgekehrt, wenn die derivirte Gleihung imaginäre Wurzeln hat, auch die ursprüngliche leren besitzen muss, ist leicht zu ersehen. Denn da wischen je zwei nächsten reellen Wurzeln der derivirten, ıach §. 116, 2 und 3, nicht mehr als Eine reelle der ırsprünglichen Gleichung liegt, auch nicht mehr als Eine Wurzel der letzteren grösser und Eine kleiner als beziehlich die grösste und kleinste Wurzel der ersteren seyn kann, so ist die Anzahl der Wurzeln der ursprünglichen, die reell seyn können, offenbar kleiner als die Anzahl der Wurzeln überhaupt, die dieser Gleichung vermöge ihres Grades zukommen; und zwar ergeben sich hieraus *mindestens* eben so viel imaginäre für die ursprüngliche als in der abgeleiteten Gleichung vorkommen, so dass, da nicht nothwendig zwischen zwei reellen Wurzeln der derivirten eine reelle der ursprünglichen Gleichung liegt, diese auch

gar wohl mehr imaginäre Wurzeln als jene hab
kann. *Hat also die derivirte Gleichung imaginä
Wurzeln, so hat die ursprüngliche dergleichen mi
destens in eben so grosser Anzahl.* Da jede de
virte Gleichung von irgend einem $n$ten Grade für d
nächstfolgende die ursprüngliche Function ist, so gi
der eben ausgesprochene Satz von jeder derivirte
Gleichung, von welchem Grade sie sey, so dass sic
von $2k$ imaginären Wurzeln der Gleichung $f^{(n)}(x)=$
sicher auf eben so viele der Gleichung $f(x)=$
schliessen lässt.

Aus diesen Sätzen lässt sich auch die Unzuläng
lichkeit der von **Rolle** in Vorschlag gebrachten, übe
dies praktisch sehr beschwerlichen *Methode der Ca
caden**) einsehen. Sie bestand im Wesentlichen da
in, dass aus der ursprünglichen die sämmtlichen d
rivirten Gleichungen gebildet wurden (die, von de
höchsten an unter einander geschrieben, mit ihre
successiv sich vermehrenden Gliedern, einen stufen
ähnlichen Bau geben, von dem die Methode den Na
men erhielt); dass man in den gegebenen Wurzel
der unmittelbar aufzulösenden niedrigsten dieser Glei
chungen sichere Grenzen der Wurzeln der nächst vor
hergehenden zu besitzen glaubte, aus denen sich durc
Annäherungsmethoden, wie wir sie später werden ken
nen lernen, die Wurzeln selbst würden berechnen las
sen; dass man diese wieder zu Grenzen der nächs
höheren Gleichung benutzte u. s. f., bis man auf di
Wurzeln der ursprünglichen Gleichung käme. Da
Vorstehende zeigt aber, dass die Methode nur Sicher
heit gewährt, wenn man zum Voraus weiss, dass di
ursprüngliche Gleichung durchgängig reelle Wurzel
hat. Sie ist daher dieser Beschränkung und ihre
unpraktischen Weitläufigkeit wegen mit Recht be
Seite gelegt worden.

---

*) Vgl. **Lagrange** a. a. O.

§. 120.

Die durchgängig reellen Wurzeln der derivirten
'eichungen sind, wie wir gesehen haben, unzuläng-
he Kennzeichen der gleichen Beschaffenheit der
'urzeln der Stammgleichung; wir wollen daher jetzt
ch andre Bedingungen hinzufügen, durch welche
eselben ergänzt werden.

Seyen wieder $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ die reellen Wurzeln
n $f(x)=0$, die aber von $f'(x)=0$, als durchgän-
g reell, $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_{m-1}$. Sind auch alle Wurzeln
n $f(x)=0$ reell, also $\mu=m$, so ist (§. 118)

$$\alpha_1 > \alpha'_1 > \alpha_2 > \alpha'_2 > \alpha_3 \ldots. > \alpha'_{m-1} > \alpha_m.$$

ind nicht alle Wurzeln der letztgenannten Gleichung
ell, so ist, wegen des paarweisen Vorkommens der
naginären, ihre Anzahl nie grösser als $m-2$, also
leiner als die Anzahl der Wurzeln der derivirten
leichung. Dann also werden zwischen einem oder
ehreren Paaren benachbarter Wurzeln von $f'(x)=0$
eine reellen von $f(x)=0$ liegen, oder diese Gleichung
ird keine Wurzel haben, die grösser als die grösste
der keine, die kleiner als die kleinste Wurzel der
rsteren Gleichung wäre, oder endlich diese Umstände
erbinden sich insgesammt oder theilweise. Sind nun
ber alle Wurzeln der ursprünglichen Gleichung reell,
o wird, nach §. 118, a) bis d),

$$f(\alpha'_1) < 0,\ f(\alpha'_2) > 0,\ f(\alpha'_3) < 0, \text{ u. s. f.,}$$

ndlich $f(\alpha'_{m-1}) \lesseqgtr 0$, je nachdem $m-1 \begin{Bmatrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{Bmatrix}$;
agegen, wenn einige der Wurzeln von $f'(x)=0$ keine
eellen Wurzeln von $f(x)=0$ einschliessen, auch ei-
ige der vorstehenden Ungleichungen fehlen. Substi-
iren wir nun eben so die Werthe α'_1, α'_2 u. s. f. in
$''(x)$, so folgt aus §. 115

$$f''(\alpha'_1) > 0,\ f''(\alpha'_2) < 0,\ f''(\alpha'_3) > 0, \text{ u. s. f.,}$$

ndlich $f''(\alpha'_{m-1}) \lesseqgtr 0$, je nachdem $m-1 \begin{Bmatrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{Bmatrix}$.
Hieraus erhellt, dass bei durchgängig reellen Wur-

zeln der ursprünglichen und der derivirten Gleichu[ng]
die Substitution der Wurzeln der letzteren in den [li]
den Functionen $f(x)$ und $f''(x)$ immer Resultate v[on]
entgegengesetzten Vorzeichen giebt, oder, was d[as]
selbe, das Product $f(x).\,f''(x)$ negativ macht. S[ind]
also unter den Producten

$f(\alpha'_1).\,f''(\alpha'_1);\ f(\alpha'_2).\,f''(\alpha'_2);\ f(\alpha'_3).\,f''(\alpha'_3)$; u. s[...]
positive, so hat $f(x)=0$ imaginäre Wurzeln. Dies[en]
Satz kann man aber auch unverändert auf $f'(x)=0$
übertragen, so dass also diese Gleichung nur ree[lle]
Wurzeln haben wird, wenn $f''(x)=0$ nur reelle h[at],
und die Substitution derselben in $f'(x)$ und $f'''(x)$ [d]as
Product $f'(x).\,f'''(x)$ immer negativ macht. Geht m[an]
nun in derselben Weise auf alle folgenden abgeleitet[en]
Gleichungen über, so erhält man endlich den allgemei-
nen Satz: *jede Gleichung* $f(x)=0$ *hat blos ree[lle]*
Wurzeln, wenn die Wurzeln sämmtlicher aus i[hr]
derivirten Gleichungen reell sind, und die Subs-
tution der Wurzeln jeder derivirten Gleichu[ng]
$f^{(n)}(x)=0$ *in die nächstvorhergehende und näch[st]-*
folgende Derivation $f^{(n-1)}(x)$ *und* $f^{(n+1)}(x)$ *Resulta[te]*
von entgegengesetzten Zeichen giebt, oder, was d[as]-
selbe, das Product derselben $f^{(n-1)}(x).\ f^{(n+1)}(x)$ *n[e]-*
gativ macht. Giebt dagegen die Substitution ein[er]
oder einiger Wurzeln von $f^{(n)}(x)=0$ *für* $f^{(n-1)}(x)$
und $f^{(n+1)}(x)$ *gleichartige Resultate oder, was da[s]-*
selbe, macht sie das Product $f^{(n-1)}(x).\ f^{(n+1)}(x)$ *p[o]-*
sitiv, so hat die Gleichung $f(x)=0$, *so oft als di[es]*
der Fall ist, ein Paar imaginäre Wurzeln.

§. 121.

Das vorstehende Kennzeichen des Vorhandensey[ns]
imaginärer Wurzeln ist nur auf indirecte Weise g[e]-
funden, daher auch die Zahl dieser Wurzeln unb[e]-
stimmt bleibt. Wir werden jedoch weiterhin an zw[ei]
verschiedenen Orten darauf zurückkommen, um es dire[ct]

ıleiten und zu vervollständigen. Dass, wenn mehrere einander folgende Derivationen, z. B. $f'(x)$ und $f''(x)$, einen reellen Werth von x, der α heisse, null wern, also α eine reelle Wurzel der beiden Gleichungen $x)=0$ und $f''(x)=0$ ist, dies allein, unabhängig der Gleichartigkeit oder Ungleichartigkeit der Zeien der nächstvorhergehenden und folgenden Functio-n, ein Kennzeichen ist, dass die Gleichung $f(x)=0$ aginäre Wurzeln hat, ist leicht zu bemerken. Nach 92 und 117 nämlich wird in diesem Falle die Funon $f''(x)$ den Factor $(x-\alpha)$ und $f'(x)$ den Factor $-\alpha)^2$ haben, folglich $f'(x)=0$ zwei gleiche Wurn enthalten; der Voraussetzung gemäss darf aber ter den Wurzeln von $f(x)=0$ keine gleich α seyn, il dann mehr als die beiden Functionen $f'(x)$ und (x) für $x=\alpha$ verschwinden würden. Dann aber lien zwischen zwei reellen Wurzeln von $f(x)=0$ die iden gleichen α von $f'(x)=0$. Wären nun alle urzeln der ersteren Gleichung reell, so müssten ch übrigens zwischen je zwei nächstbenachbarten ter denselben zusammen wenigstens $m-2$ reelle urzeln von $f'(x)=0$ liegen; aber diese Gleichung t deren, nach Abzug der beiden α, nur noch $m-3$; glich können nicht alle Wurzeln der ursprünglichen eichung reell seyn.

Es giebt einen besondern Fall, in welchem man ne alle Untersuchung dem Vorhergehenden gemäss s Vorhandenseyn imaginärer Wurzeln unmittelbar kennen kann. Aus

$$f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_m$$

gt nämlich allgemein

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)=m(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}\\ +(m-1)(m-2)\ldots(m-n)\,a_1x^{m-n-1}+\ldots\\ \ldots+(n+1)n\ldots3.2\,a_{m-n-1}\,x+n(n-1)\ldots2.1\;a_{m-n}.\end{aligned}$$

ieser Ausdruck verschwindet für $x=0$, wenn a_{m-n} $=0$ ist; es hat also dann $f^{(n)}(x)=0$ die reelle Wur-

zel Null. Diese in $f^{(n+1)}(x)$ und $f^{(n-2)}(x)$ substitu-
giebt die Resultate $(n-1)(n-2)\ldots 2.\,1\,a_{m-n+1}$ u
$(n+1)n(n-1)\ldots 2.\,1\,a_{m-n-1}$, deren Vorzeichen nur v
a_{m-n+1} und a_{m-n-1} abhängen. Sind also diese Gr
sen zeichengleichartig, so hat die Gleichung $f(x)=0$
imaginäre Wurzeln. *Fehlt demnach in einer Gl-*
chung f(x)=0 *ein Glied, so hat sie sicher imag-*
näre Wurzeln, wenn die dem fehlenden nächst-
nachbarten Glieder einerlei Zeichen haben. W
mit a_{m-n} auch a_{m-n-1} oder noch mehrere der vorh-
gehenden Coefficienten null, so verschwindet für $x=0$
auch $f^{(n+1)}(x)$. Nach der Bemerkung dieses §. h
dann also die ursprüngliche Gleichung ohne alle wi-
ter hinzukommende Bedingung imaginäre Wurze
Fehlen also in einer Gleichung zwei oder mehre
nächstbenachbarte Glieder, so hat die Gleichu
entschieden imaginäre Wurzeln.

§. 122.

Auf vorstehende analytische Entwickelungen fä
ein helleres Licht, wenn wir sie durch geometrisc
Betrachtungen erläutern, mittelst deren sie überd
ursprünglich aufgefunden worden sind*).

Wird $f(x)$ als Ordinate einer parabolischen Cu
dargestellt, so bestimmt, wie bekannt, $f'(x)$ die N
gung der Berührenden derselben gegen die x-A
Bezeichnen daher die Werthe, welche $f(x)=0$ m
chen, die Durchschnittspuncte der Curve mit die

---

*) Man sehe: Jac. Stirling *Illustratio tractatus* Is. Ne-
toni *de enumeratione linearum tertii ordinis. Oxon.* 1717. *Ed.*
Paris. 1797 *p.* 111. und De Gua *Mém. de l'Acad. d. Scienc.* 17
p. 462. Auch Euler in seinen *Institt. Calc. Differ. P. II. Cap.*
13, obgleich sich der Curven nicht bedienend, entwickelte doch
dasselbe Princip, wie die beiden vorgenannten. In den vorhergeh
den §§. sind wir grösstentheils Lagrange's *résol. des équat.*
mér. Note VIII. gefolgt.

:e, so bestimmen dagegen die Wurzeln der Glei-
ung $f''(x)=0$ die Maxima und die Minima der Curve.
er ist nun zuerst unmittelbar klar, dass die letztere
ischen je zwei benachbarten Durchschnittspuncten
nigstens Ein (positives oder negatives) Maximum
ben muss. Denn wegen ihrer Stetigkeit und weil zu
ler Abscisse immer nur Eine Ordinate gehört, wird
immer nur von einem Durchschnitte zu dem an-
rn bis zu einer gewissen endlichen Entfernung von
r Axe gelangen können, und sich dann wieder der
e nähern müssen, bis sie dieselbe trifft; wäre es
ders, so müsste sie unterbrochen seyn, was, da
x) weder unmöglich noch unendlich werden kann,
e statt findet. Zwischen je zwei benachbarten Durch-
hnitten liegt also immer mindestens Ein Maximum.
en so einleuchtend ist aber auch, dass die Curve
ischen zwei benachbarten Durchschnitten 3, 5 und
de ungerade Anzahl von Puncten haben kann, die
m Theil Maximis, zum Theil Minimis angehören.
enn für drei z. B. kann die Curve zuerst bis zu ei-
m Maximum steigen, dann bis zu einem Minimum
llen, wiederum bis zu einem zweiten Maximum stei-
n und dann bis zum zweiten Durchschnitt sinken;
Allgemeinen wird offenbar die Anzahl der Minima
n eine Einheit geringer als die der Maxima seyn.
ass nicht mehr als Ein Durchschnitt auf das letzte
aximum folgen oder dem ersten vorangehen kann,
t ebenfalls klar, da, wenn noch zwei oder mehr
lgten oder vorangingen, der erwähnte Durchschnitt
eziehlich nicht der letzte oder erste seyn könnte.
s ist aber auch möglich, dass den äussersten Maxi-
is gar kein Durchschnitt, sondern nur ein Minimum
rangeht oder folgt, und jenseits desselben sich die
urve, ohne die Abscissenaxe zu berühren, ins Un-
dliche wendet. Eben so leicht ergiebt sich, dass
wischen zwei nächsten Maximis nicht mehr als Ein
urchschnitt liegen kann, indem, zwei oder mehrere

angenommen, diese noch überdies zwischen sich Ma-
xima enthalten müssten, mithin die bezeichneten nic
die nächsten wären; dagegen erhellt, dass zwei Ma-
xima auch nur durch ein Minimum getrennt seyn kö
nen, also zwischen ihnen durchaus kein Durchschn
liegt. Alles dieses veranschaulicht Fig. 32, die ke
ner weiteren Erklärung bedarf. Dass übrigens, wen
man statt „Durchschnitte" „Wurzeln der ursprüng
chen Gleichung" und statt „Maxima und Minima
„Wurzeln der derivirten" setzt, die Sätze des §. 1
erhalten werden, bedarf kaum der Erwähnung. Ebe
so leicht bestätigen sich die Sätze von §. 118 ge
metrisch.

§. 123.

Auch die Versinnlichung des §. 117 hat kei
Schwierigkeit. Was nämlich den ersten Punct de
selben betrifft, so muss, wenn zwei Durchschnitte
Einen zusammenrücken, auch das zwischenliegend
positive oder negative Maximum sich mit ihnen vere
nigen, und die Curve wird dann statt der Durc
schnittspuncte nur einen Berührungspunct mit der A
scissenaxe gemein haben und in der Nachbarscha
desselben ganz auf der positiven oder negativen Sei
der x-Axe liegen. Dasselbe geschieht, wenn vier od
irgend eine gerade Anzahl von Durchschnitten zusam
menfallen, wobei klar ist, dass beziehungsweise dre
oder allgemein eine um eine Einheit geringere, al
ungerade, Anzahl von Maximis sich vereinigen werde
Ist dagegen die Zahl der zusammenfallenden Durc
schnitte ungerade, z. B. $=3$, so fallen eine gerad
Anzahl Maxima, im Beispiel 2, zusammen, und
der letzte Durchschnitt, bei dieser Voraussetzung, d
Curve immer auf die entgegengesetzte Seite von de
jenigen führt, auf welcher sie, bevor sie den erste
erreichte, lag, so wird die Curve jetzt in der Absci
senaxe einen Wendepunct haben. Alles dies stimm
mit §. 92 vollkommen überein.

Was den zweiten Punct des §. 117 anbelangt, wollen wir die sämmtlichen Functionen $f(x)$, $f'(x)$, (x) u. s. f., nach §. 68, als Curven in Beziehung f dieselben rechtwinkligen Coordinatenaxen construirt nken. Dann bezeichnen, wie dies schon in §. 109 E. benutzt worden ist, die letzten Glieder dieser ısdrücke die positiven oder negativen Abstände vom ordinatenanfang, in welchen die Ordinatenaxe von ısen Curven geschnitten wird. Nun ist a. a. O. gegt worden, dass ein Durchschnitt der $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}\right\}$ dinatenaxe für einen ungeraden Grad der Gleichung $x) = 0$ mit einer ungeraden Anzahl von Durchschnit- ı der $\left\{\begin{matrix}\text{negativen}\\ \text{positiven}\end{matrix}\right\}$ Abscissenaxe verbunden ist; für ei- n geraden Grad der Gleichung $f(x) = 0$ dagegen r für einen Durchschnitt der negativen Ordinatenaxe ıe ungerade Anzahl von Durchschnitten des positi- ı sowohl als des negativen Theils der Abscissenaxe gt. Ferner erhellt aus §. 117 sowohl als aus §. 122 cht, dass die Curve $f(x)$ nicht mehr als Einen Durch- ınitt des positiven sowohl als des negativen Theils der Axe mehr als die Curve $f'(x)$ haben kann. Schnei- n daher beide Curven die Ordinatenaxe auf der $\left\{\begin{matrix}\text{sitiven}\\ \text{gativen}\end{matrix}\right\}$ Seite zugleich (was einer Zeichenfolge der efficienten a_{m-1} und a_m in $f(x) = 0$ entspricht), so nn $f(x)$ nicht mehr als Einen Durchschnitt und zwar s negativen Theils der Abscissenaxe mehr haben $f'(x)$, mag es nun von geradem oder ungeradem ade seyn. Schneiden dagegen die Curven die ent- gengesetzten Theile der Ordinatenaxe (und bilden o a_{m-1} und a_m in $f(x)$ einen Zeichenwechsel), so gt auf dieselbe Weise, dass $f(x)$ nicht mehr als ıen Durchschnitt und zwar der positiven x-Axe mehr ben kann als die Curve $f'(x)$. Da nun diese Schlüs- , die einer ausführlicheren Entwickelung nicht be- rftig scheinen, eben so auf die Curven $f'(x)$ und

$f''(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ u. s. f. sich übertragen la-
sen, so gelangt man auf dieselben Resultate wie i
§. 117.

§. 124.

Um auch die Kennzeichen der Realität sämmtl-
cher Wurzeln von $f(x)=0$ auf geometrischem We-
wiederzufinden, so sey die Anzahl der reellen Wu-
zeln dieser Gleichung $=\mu$. Dann ist die Zahl d-
Maxima und Minima, nach §. 122, nicht kleiner a
$\mu-1$; aber auch, da diese Werthe durch die Gl-
chung vom $(m-1)$ten Grade $f'(x)=0$ gegeben sin
nicht grösser als $m-1$. Hat nun die gegebene Gl-
chung nur reelle Wurzeln, so wird $\mu=m$, es fall
also die beiden eben gefundenen Grenzen zusamm
und die Zahl der Maxima und Minima ist dann $=m-$
was mit dem ersten Satze des §. 119 zusammentr
und, wie dort, auf alle folgenden Derivationen u
deren zugehörige Curven übergetragen werden ka
Es finden aber dann keine Minima, sondern nur M-
xima statt, indem, nach §. 122, zwischen je zw
nächsten Durchschnitten von $f(x)$ ein Maximum lieg
muss, was für sämmtliche m Durchschnitte $m-1$ M-
xima giebt, folglich unter den $m-1$ Wurzeln v
$f'(x)=0$ keine einem Minimum angehören kann. Na
§. 55 a. E. besteht aber das Kennzeichen, dass e
Function $f(x)$ für irgend einen Werth ein Maxim
hat, darin, dass die Substitution desselben in d
Functionen $f(x)$ und $f''(x)$ Resultate von entgegen-
setzten Zeichen geben oder, was hieraus folgt, d
Product derselben $f(x) \,.\, f''(x)$ negativ machen mu
Tragen wir dies über auf das Product der derivir
Functionen $f^{(n-1)}(x) \,.\, f^{(n+1)}(x)$, so erhalten wir d
ersten Theil des Satzes am Ende von §. 120.

Umgekehrt lässt sich auch ohne Mühe zeig
dass, wenn $f'(x)=0$ nur reelle Wurzeln hat und d
Substitution derselben in den Functionen $f(x)$ u

(x) für erstere Maxima zu erkennen giebt, die Glei-
ung $f(x) = 0$ nur reelle Wurzeln hat. Da nämlich
x) immer nur Einen, aber auch stets einen reellen
erth hat, so muss, wegen der Stetigkeit der Linie
ischen je zwei benachbarten Maximis, die durch kein
nimum getrennt werden, und also auf entgegen-
setzten Seiten der Abscissenaxe liegen, sich noth-
ndig ein Durchschnitt finden. Dies giebt $m - 2$
irchschnitte, und also eben so viele reelle Wurzeln
r ursprünglichen Gleichung. Ueberdies muss aber
ch die Curve vor dem ersten und nach dem letzten
ximum die x-Axe Einmal schneiden. Denn ange-
mmen, sie ginge, ohne Durchschnitt, auf derselben
ite ins Unendliche, so würde hieraus offenbar aus-
r den vorhandenen Maximis sowohl vor als nach den-
lben sich noch ein Minimum ergeben, was gegen die
raussetzung ist. Es giebt also $m - 2 + 2 = m$
irchschnitte, folglich eben so viele reelle Wurzeln.

§. 125.

Was die imaginären Wurzeln der ursprünglichen
eichung betrifft, so können diese auf die Wurzeln
r abgeleiteten einen zweifachen Einfluss haben.
rschwinden nämlich zwei Durchschnitte A und B
r Curve $f(x)$ (Fig. 33.), so verschwindet entweder
s zwischenliegende Maximum M' und geht mit den
iden benachbarten M, M'' in ein einziges Maximum
über, oder es bleiben die beiden benachbarten Ma-
na und das zwischenliegende verwandelt sich in ein
nimum (Fig. 34.). Im ersteren Falle gehen mit
n zwei Maximis zwei reelle Wurzeln der derivirten
eichung verloren oder es erhält dieselbe zwei ima-
näre; im zweiten erhält sie zwar wieder einen reel-
n Werth, aber einen solchen, der einem *Minimum*
gehört. Die ursprüngliche Gleichung verliert in
iden Fällen zwei reelle und erhält demnach zwei
aginäre Wurzeln.

Beide Sätze lassen sich umkehren. Man kan
nämlich erstens vollkommen auf dieselbe Weise, w
es in §. 119 zur Ableitung des dritten Satzes gesch
hen ist, durch Betrachtung der Durchschnitte, Ma
ma und Minima erweisen, was dort mittels der ree
len Wurzeln der ursprünglichen und der derivirt
Gleichung gewonnen wurde. Zur Ergänzung die
dann noch zweitens die Bemerkung, dass nicht bl
jedes Paar imaginärer Wurzeln der derivirten Gl
chung ein Paar imaginärer der ursprünglichen anzeig
sondern auch dasselbe von jeder reellen Wurzel d
derivirten gilt, die einem Minimum der Curve $f($
angehört. Denn da zwischen den beiden Maximis, d
ein solches trennt, kein Durchschnitt statt findet,
sind an dieser Stelle zwei Durchschnitte als verlor
gegangen zu betrachten, die wirklich vorhanden se
würden, wenn das Minimum durch die Berührung m
der x-Axe hindurch und in ein Maximum auf der e
gegengesetzten Seite hinüberginge. Die ursprünglich
Gleichung hat also im angenommenen Falle zw
reelle Wurzeln weniger als sie haben würde, wen
kein Minimum zwischen den beiden Maximis läge.

Als Resultat aus Vorstehendem ziehen wir d
Satz: *Die Gleichung* f(x)=0 *hat so viel Paa*
imaginärer Wurzeln als die derivirte f′(x) =
1) *imaginäre Wurzelpaare und* 2) *einzelne ree*
Wurzeln hat, die zu Minimis von f(x) *gehören.*

Hat demnach die derivirte Gleichung weder im
ginäre Wurzeln noch reelle, die Minima der ursprün
lichen Function geben; hat also $f'(x)=0$ nur ree
Wurzeln, die zu Maximis von $f(x)$ gehören, so b
sitzt die Gleichung $f(x)=0$ nur reelle Wurzeln.

§. 126.

Da das unterscheidende Kennzeichen der Minin
irgend einer derivirten Function $f^{(n-1)}(x)$ darin beste
dass die Substitution der reellen Wurzeln der Gl

ung $f^{(n)}(x)=0$ das Product $f^{(n-1)}(x) \cdot f^{(n+1)}(x)$ sitiv macht, so führt der zweite Theil des Hauptzes im vorhergehenden §. auf den zweiten Theil s Satzes am Ende von §. 120 zurück, der hiermit *rect* erwiesen ist. Derselbe kann jetzt aber auch ie bedeutende Erweiterung erhalten. Das vorstende Kennzeichen wird nämlich unbrauchbar, wenn e der Functionen $f^{(n+1)}(x)$ oder $f^{(n-1)}(x)$ oder beide ll werden.

Es ist aber in §. 64 gezeigt worden, dass, wenn irgend einen reellen Werth von x eine Anzahl von ccessiven Derivationen, die wir i nennen wollen, null rd, damit eine Vereinigung von eben so vielen Manis oder Minimis angezeigt ist, die eine Biegung n Maximum oder Minimum) oder einen Wendepunct rvorbringt, je nachdem i ungerade oder gerade ist, l wo im ersteren Falle wiederum ein $\begin{Bmatrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{Bmatrix}$ tt findet, je nachdem die Substitution des null machen- n Werthes in die den verschwindenden Derivationen chstvorhergehenden und folgenden das Product aus sen Functionen $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{Bmatrix}$ macht. Ist i gerade, so d die Zahl der vereinigten Minima gleich der der xima, nämlich beide $= \frac{1}{2}i$ seyn; ist i ungerade, ist die Zahl der $\begin{Bmatrix}\text{Minima}\\ \text{Maxima}\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(i+1)$ und also die $\begin{Bmatrix}\text{Maxima}\\ \text{Minima}\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(i-1)$, je nachdem der Vereinigspunct ein $\begin{Bmatrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{Bmatrix}$ ist. Bringen wir nun dieses No. 2 des vorigen §. in Verbindung, so erhalten folgendes Ergebniss: *Verschwindet eine Anzahl n* i *auf einander folgenden Derivationen, so zeigt s* 1) *wenn* i *gerade ist, für die aus der nächsthergehenden nicht verschwindenden Derivation bildende Gleichung, folglich auch*, §. 119 (3*ter tz*), *für die ursprüngliche* f(x)=0, *eine Anzahl n* $\frac{1}{2}$i *imaginären Wurzelpaaren an; ist* 2) i *un-*

gerade und das Product aus den beiden den verschwindenden Derivationen nächstvorhergehenden und folgenden Functionen negativ, so ist die Zahl der hieraus zu erkennenden imaginären Wurzelpaare der ursprünglichen Gleichung = ½ (i—1); 3) *ist endlich* i *ungerade und das Product aus den beiden den verschwindenden nächstvorhergehenden und folgenden Derivationen positiv, so verräth diese* ½ (i+1) *imaginäre Wurzelpaare der Gleichung* f(x)=0.

Diesen Satz wollen wir nach seinem ersten Erfinder *den Satz* de Gua's nennen *).

§. 127.

Nach dem bisher Vorgetragenen ist die Unterscheidung der imaginären Wurzeln einer Gleichung von ihren reellen von der Betrachtung der derivirten Gleichung abhängig gemacht, deren Wurzeln hierbei als bekannt vorausgesetzt werden. Obgleich nun letztere Gleichung immer um einen Grad niedriger ist als die vorgelegte, auch hinsichtlich ihrer Wurzeln auf dieselbe Weise behandelt werden kann, so dass man auf Gleichungen von immer niedrigerem Grade kommt, so lässt sich doch aus dem, was in §. 119 in Beziehung auf Rolle's Methode der Cascaden gesagt worden ist, leicht abnehmen, dass man auf diesem Wege im günstigsten Falle nur hoffen darf, einige imaginäre Wurzeln der gegebenen Gleichung zu entdecken, ohne darüber Gewissheit zu haben, ob in ihr noch ein oder mehrere Paare derselben enthalten sind oder nicht; ja es kann die Betrachtung der derivirten Gleichungen gar keine imaginären Wurzeln der ursprünglichen anzeigen, indess diese doch deren besitzt. Dieser letz-

*) Man sehe *Mém. de l'Acad.* a. a. O. Vermöge dieses Satzes würde sich leicht §. 121 vervollständigen lassen; wir versparen es jedoch auf §. 140.

e Mangel lässt sich aber durch nachfolgende Me-
de beseitigen, welche Kennzeichen angiebt, ob alle
urzeln von $f(x)=0$ reell sind oder nicht, und wel-
e nicht die Auflösung anderer höherer Gleichungen
aussetzt.

Nach §. 120 a. E. ergiebt sich, dass die Gleichung
$x)=0$ nur reelle Wurzeln hat, wenn $f'(x)=0$ nur
lle besitzt und die Substitution derselben in dem
oduct $f(x) \cdot f''(x)$ dasselbe negativ macht. Auf
selbe Weise wird aber $f'(x)=0$ nur reelle
urzeln haben, wenn $f''(x)=0$ nur reelle hat, und
Substitution derselben das Product $f'(x) \cdot f'''(x)$
gativ macht u. s. f. Von diesen Sätzen lässt sich
n aber auch folgende Ansicht fassen.

Man bilde eine Gleichung $y=f(x) \cdot f''(x)$ und
minire x zwischen dieser und $f'(x)=0$, so erhält
n damit eine Gleichung nach y, die für diese Grösse
viel Werthe giebt als $f'(x)=0$ Wurzeln hat, und
her von demselben Grade als letztere Gleichung ist.
d diese Wurzeln nun, unter der Voraussetzung,
ss $f'(x)=0$ nur reelle Wurzeln hat, sämmtlich ne-
tiv, so hat auch $f(x)=0$ nur reelle Wurzeln. Da
er nach Descartes's Satz eine Gleichung von durch-
ngig reellen und negativen Wurzeln nur positive
ieder haben kann, so wird es ein *Kennzeichen der
alität sämmtlicher Wurzeln von* $f(x)=0$ *seyn,
ss, die Wurzeln von* $f'(x)=0$ *als reell vorausge-
zt, die durch Elimination von* x *zwischen dieser
d der Gleichung* $y=f(x) \cdot f''(x)$ *entstandene Glei-
ung nach* y *nur positive Glieder hat.*

Die Voraussetzung der Realität sämmtlicher Wur-
ln von $f'(x)=0$ wird nun wieder auf derjenigen der
urzeln von $f''(x)=0$ und dem Vorhandenseyn von
s positiven Gliedern in der durch Elimination von
zwischen $f''(x)=0$ und $y=f'(x) \cdot f'''(x)$ gebilde-
n Gleichung nach y beruhen u. s. f.

§. 128.

Um diese Methode durch ein ausgeführtes Beispiel zu erläutern, so sey

$$f(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3; \text{ also}$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2a_1 x + a_2;$$
$$f''(x) = 6x + 2a_1;$$
$$f'''(x) = 6;$$

so ist

$$y = (x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3)(6x + 2a_1)$$
$$= 6x^4 + 8a_1 x^3 + 2(a_1^2 + 3a_2)x^2 + 2(a_1 a_2 + 3a_3)x + 2a_1 a_3;$$

oder, wenn wir zur Vereinfachung $a_1 = 3b_1$, $a_2 = 3b_2$ und, der Gleichförmigkeit der Bezeichnung wegen, $a_3 = b_3$ setzen,

$$y = 6[x^4 + 4b_1 x^3 + 3(b_1 + b_2)x^2 + (3b_1 b_2 + b_3)x + b_1 b_3].$$

Hierzu kommt die Gleichung

$$f'(x) = 3(x^2 + 2b_1 x + b_2) = 0.$$

Lassen wir in dieser letzteren Gleichung den constanten Factor 3 weg, multipliciren sie mit x^2 und subtrahiren das Resultat von der ersteren Gleichung, in der für unsern Zweck, zur Vereinfachung der Rechnung, der Factor 6 weggelassen werden darf, so kommt

$$y = 2b_1 x^3 + (3b_1^2 + 2b_2)x^2 + (3b_1 b_2 + b_3)x + b_1 b_3.$$

Multipliciren wir ferner $f'(x) = 0$ mit $2b_1 x$ und subtrahiren das Product von der vorstehenden Gleichung, so bleibt

$$y = (-b_1^2 + 2b_2)x^2 + (b_1 b_2 + b_3)x + b_1 b_3.$$

Multipliciren wir endlich $f'(x) = 0$ mit $(-b_1^2 + 2b_2)$ und subtrahiren das Product von der so eben erhaltenen Gleichung, so ergiebt sich

$$y = (2b_1^3 - 3b_1 b_2 + b_3)x + b_1^2 b_2 - 2b_2^2 + b_1 b_3,$$

wofür wir zur Abkürzung

$$y = Ax + B$$

setzen wollen. Multiplicirt man nun $f'(x) = 0$ mit A^2, so dass also

$$A^2 x^2 + 2A^2 b_1 x + A^2 b_2 = 0,$$

und substituirt hierin die Werthe

$$Ax = y - B;\quad A^2 x^2 = y^2 - 2yB + B^2,$$

kommt

$$y^2+2(Ab_1-B)y+A^2b_2-2ABb_1+B^2=0.$$

at nun diese Gleichung nur positive Glieder, d. h. t zugleich

$$Ab_1-B>0 \quad \text{und} \quad A^2b_2-2ABb_1+B^2>0,$$

id sind überdies die Wurzeln der Gleichung

$$f'(x)=x^2+2b_1x+b_2=0$$

ır reell, so hat auch die vorgelegte Gleichung

$$f(x)=x^3+3b_1x^2+3b_2x+b_3=0$$

ır reelle Wurzeln. Um nun auch für die Gleichung $'(x)=0$ die Kennzeichen der Realität der Wurzeln uf dieselbe Art zu finden, bilden wir die Gleichung

$$y=f'(x).f'''(x) = 6(x^2+2b_1x+b_2),$$

ofür jedoch, da zu unserm Zwecke die Beachtung es Factors 6 nicht erforderlich ist, auch

$$y=x^2+2b_1x+b_2$$

eschrieben werden kann. Eben so kann

$$f''(x)=x+b_1=0$$

esetzt werden. Substituirt man den hieraus folgenen Werth von x in die Gleichung für y, so eriebt sich

$$y+b_1^2-b_2=0.$$

Ist also

$$b_1^2-b_2>0,$$

o wird die Gleichung $x^2+2b_1x+b_2=0$ und, sofern azu noch die vorher gefundenen Bedingungen

$$Ab_1-B>0 \quad \text{und} \quad A^2b_2-2ABb_1+B^2>0$$

ommen, auch die gegebene Gleichung

$$x^3+3b_1x^2+3b_2x+b_3=0$$

ur reelle Wurzeln haben.

§. 129.

Man könnte auf diese Weise, wie Lagrange emerkt hat*), für die höheren Gleichungen bis zu inem beliebigen Grade ein für allemal Tafeln ent-

*) *Résolut. des équat. numér. Note VIII. p.* 178 *ed.* 1.

werfen, welche die Kennzeichen der Realität ihr sämmtlichen Wurzeln enthielten. Die hierzu erforde lichen Eliminationen würden sich sowohl nach der hi befolgten als nach andern Methoden*) immer ohn Schwierigkeit ausführen lassen. Aber die Resultat würden bald ziemlich weitläufig werden und in de Anwendung zu mühsamen Rechnungen führen. Ma erhielte überdies in allen den Fällen, in welchen sic ergäbe, dass die vorgelegte Gleichung nicht durc gängig reelle Wurzeln hätte, immer nur ein negativ Resultat; das Hauptproblem: Eingrenzung der einze nen Wurzeln, würde hierdurch nicht gefördert.

Reichen demnach die bisher dargestellten Meth den, welche auf die derivirten Gleichungen zurückg hen, nicht aus, um ein wahrhaft praktisch brauchba res Ergebniss zu erzielen, so sind andre, früher vo Newton**) und Campbell***) angegebene Ken zeichen der imaginären Wurzeln mindestens eben s ungenügend, indem die Gleichungen Wurzeln diese Art haben können, ohne dass dies durch jene Regel jederzeit angezeigt wird, wie dies bereits Euler†) nac gewiesen hat. Es blieb daher bis auf die neueste Ze in diesem Theile der Theorie der Gleichungen noc eine wesentliche Lücke übrig. Diese auszufüllen i Fourier††) gelungen. Hiervon wird der nächst Abschnitt handeln, dessen Inhalt sowohl von dem de gegenwärtigen als auch von dem grössten Theil de sechsten Abschnitts völlig unabhängig ist.

---

*) Man vergleiche hierüber z. B. Meier Hirsch's Sammlun von Aufgaben a. d. Theorie d. algebr. Gleichungen. Th. I. S. 11

**) *Arithmetica universalis P. II. C. 1. X. cf. Additam. p. 6 ed. Castill.*

***) Newtoni *arithm. univ. P. II. Additam. p. 67. ed. Castil*

†) *Instit. Calc. Diff. P. II. C.* 13.

††) *Analyse des équations déterminées. Première partie. Paris* 183

Achter Abschnitt.

'ourier's erste Methode zur Unterscheidung der reellen und imaginären Wurzeln.

---

§. 130.

In den §§. 102 und 106 zeigte es sich, dass die bere und die untere Grenze der positiven und der egativen und selbst der imaginären Wurzeln einer leichung erhalten werde, wenn man Werthe anzueben wisse, die den Functionen

$$f(x),\, f'(x),\, f''(x), \ldots f^{(m-1)}(x),\, f^{(m)}(x)$$

eziehungsweise durchgängig positive oder durchgänig abwechselnde Zeichen ertheilen. Nennen wir daer diese Grenzen, wie a. a. O., wieder l und $-g$, so at für $x = -g$ die vorstehende Functionenreihe, die ir von nun an in der umgekehrten Ordnung

$$f^{(m)}(x),\, f^{(m-1)}(x),\, \ldots f''(x),\, f'(x),\, f(x)$$

chreiben, auch öfter abgekürzt durch

$$f^{(m)},\, f^{(m-1)}, \ldots f'', f', f$$

arstellen wollen, m *Zeichenwechsel*, dagegen für $x = l$, m *Zeichenfolgen*, also *keinen* Zeichenwechsel; der, wie wir es auch ausdrücken können: *beim steigen Uebergange von* x = —g *zu* x = l *hat die Funtionenreihe sämmtliche* m *Zeichenwechsel verloren.* Es ist klar, dass wenn die Zeichenreihe

$$\begin{array}{llllll} & + & - & \cdots\cdots & \pm & \mp & \pm \\ \text{in} & + & + & \cdots\cdots & + & + & + \end{array}$$

übergehen soll, die negativen Zeichen der erstere auf einmal oder nach und nach in positive übergehe müssen. Bei der Stetigkeit der vorliegenden Functic nen kann dies aber nur dadurch geschehen, dass de Werth irgend einer oder einiger derselben durch Nu geht. Wir haben daher zu untersuchen, *welche Ver änderungen in Absicht auf die Zahl der Zei chenwechsel mit dem Durchgange von x durc Werthe, welche ein oder einige der Glieder de obigen Functionenreihe null machen, verbunde sind.* Wir werden hierbei fünf Fälle unterscheide nämlich:

1) Werthe von x, die nur Eine und zwar di letzte Function $f(x)$ null machen.

2) Werthe von x, die nur Eine, aber eine mit lere Function $f^{(n)}(x)$ null machen.

3) Werthe von x, die mehrere auf einander fo gende mittlere Functionen null machen.

4) Werthe von x, die mehrere auf einander fo gende Functionen am Ende der Reihe verschwinde lassen.

5) Werthe von x, bei welchen in mehreren The len der Reihe und am Ende derselben einige auf ei ander folgende Functionen verschwinden.

§. 131.

Erster Fall. Sey für $x=a$, $f(x)=0$, also $f(a)=0$ Bedeutet ω, wie früher, eine verschwindend klein Grösse, so können wir die drei Werthe der Fu ction $f(x)$

$$f(a-\omega)\ ,\ f(a)\ ,\ f(a+\omega)$$

mit einander vergleichen. Nach der Voraussetzun und vermöge §. 39 werden diese sich auch ausdr cken lassen durch

$$-\omega f'(a)\ ,\ \ 0,\ \ +\omega f'(a).$$

a nun ω immer so klein gedacht werden kann, dass r $x=a\pm\omega$ so wenig, als für $x=a$ selbst, noch ir- nd eine andre Function ausser $f(x)$ null werde, so rd die Functionenreihe für $x=a-\omega$, für $x=a$ d für $x=a+\omega$ von $f^{(m)}(x)$ bis $f''(x)$ einerlei Zei- enverbindungen darstellen und nur in den beiden zten Gliedern eine Verschiedenheit zeigen. Wir ben dabei noch zu unterscheiden, ob $f'(a)$ positiv er negativ, und so findet sich, wenn wir statt $=a\pm\omega$ kurz $(a\pm\omega)$ schreiben, folgende schemati- he Uebersicht:

wenn f′(a) *positiv*,

$$\left.\begin{array}{lcccc} & f^{(m)}, f^{(m-1)} \ldots\ldots & f' & f \\ (a-\omega) & \ldots\ldots\ldots\ldots & + & - \\ (a) & \ldots\ldots\ldots\ldots & + & 0 \\ (a+\omega) & \ldots\ldots\ldots\ldots & + & + \end{array}\right\} (1)$$

wenn f′(a) *negativ*,

$$\left.\begin{array}{lccc} (a-\omega) & \ldots\ldots\ldots\ldots & - & + \\ (a) & \ldots\ldots\ldots\ldots & - & 0 \\ (a+\omega) & \ldots\ldots\ldots\ldots & - & - \end{array}\right\} (2),$$

h. *beim stetigen Durchgang von* x *durch einen erth* a, *der die Function* f(a) *verschwinden macht so eine reelle Wurzel der Gleichung* f(x)=0 *ist*), *rliert die Functionenreihe Einen Zeichenwechsel.*

§. 132.

Zweiter Fall. Mache $x=a$, $f^{(n)}(a)=0$, so ist

$$f^{(n)}(a-\omega) = -\omega f^{(n+1)}(a)$$

$$f^{(n)}(a+\omega) = +\omega f^{(n+1)}(a).$$

I nun auch hier wieder ω so klein zu denken ist, ss, so wenig als für $x=a$ eine andre Function aus- $f^{(n)}(x)$ null wird, so wenig auch für $x=a\pm\omega$ e der Functionen verschwinden soll, so haben wir r die drei auf einander folgenden Functionen

$$f^{(n+1)}(x), f^{(n)}(x), f^{(n-1)}(x)$$

zu betrachten, indem alle übrigen, für alle drei We
the $a-\omega$, a, $a+\omega$, einerlei Zeichenverbindungen ha
ben werden; müssen hierbei aber noch unterscheide
ob $f^{(n+1)}(a)$ und $f^{(n-1)}(a)$ positiv oder negativ sin
Mit Berücksichtigung dessen findet sich:

wenn $f^{(n+1)}(a)$ und $f^{(n-1)}(a)$ positiv,

	$f^{(n+1)}$,	$f^{(n)}$,	$f^{(n-1)}$	
$(a-\omega)$	+	−	+	
(a)	+	0	+	(3)
$(a+\omega)$	+	+	+	

wenn $f^{(n+1)}(a)$ negativ und $f^{(n-1)}(a)$ positiv,

−	+	+	
−	0	+	(4)
−	−	+	

wenn $f^{(n+1)}(a)$ positiv und $f^{(n-1)}(a)$ negativ,

+	−	−	
+	0	−	(5)
+	+	−	

wenn $f^{(n+1)}(a)$ und $f^{(n-1)}(a)$ negativ,

−	+	−	
−	0	−	(6)
−	−	−	

Hier hat die Functionenreihe in (3) und (6) *zwi*
Zeichenwechsel verloren, in (4) und (5) *keinen;* als:
beim stetigen Durchgang von x *durch einen Wert*
a, *der Eine mittlere Function* $\mathrm{f}^{(n)}(\mathrm{a})$ *verschwinde*
macht (*also zwar keine reelle Wurzel der ursprün-*
lichen, wohl aber der abgeleiteten Gleichun
$\mathrm{f}^{(n)}(\mathrm{x})=0$ *ist*), *verliert die Functionenreihe zwi*
oder keinen Zeichenwechsel, je nachdem die beide
der verschwindenden nächstbenachbarten Function
für $\mathrm{x}=\mathrm{a}$ *einerlei oder entgegengesetzte Zeich*
haben.

§. 133.

Dritter Fall. Mache $x=a$ mehrere auf einan-
er folgende mittlere Functionen verschwinden, z. B.
e zwischen $f^{(n+1)}(x)$ und $f^{(n-i)}(x)$ enthaltenen, so
iss also

$$f^{(n)}(a)=f^{(n-1)}(a)=\ldots\ldots=f^{(n-i+1)}(a)=0.$$

ier ist, nach §. 39,

$$f^{(n)}(a+\omega)=\omega\, f^{(n+1)}(a);$$

$$f^{(n-1)}(a+\omega)=\frac{\omega^2}{2}\, f^{(n+1)}(a);$$

$$f^{(n-2)}(a+\omega)=\frac{\omega^3}{2.3}\, f^{(n+1)}(a);$$

u. s. w.

$$f^{(n-i+1)}(a+\omega)=\frac{\omega^i}{2.3\ldots i}\, f^{(n+1)}(a).$$

benso

$$f^{(n)}(a-\omega)=-\omega\, f^{(n+1)}(a);$$

$$f^{(n-1)}(a-\omega)=+\frac{\omega^2}{2}\, f^{(n+1)}(a);$$

$$f^{(n-2)}(a-\omega)=\frac{-\omega^3}{2.3}\, f^{(n+1)}(a);$$

u. s. w.

$$f^{(n-i+1)}(a-\omega)=\frac{(-\omega)^i}{2.3\ldots i}\, f^{(n+1)}(a).$$

Indem wir nun, aus gleichen Gründen wie in den
orhergehenden Fällen, die $f^{(n+1)}$ vorhergehenden
nd $f^{(n-i)}$ folgenden Functionen unberücksichtigt las-
en, finden sich aus den vorstehenden Formeln und
ach gehöriger Unterscheidung der Zeichen von
$^{(n+1)}(a)$ und $f^{(n-i)}(a)$ für die drei Werthe von
: $a-\omega$, a, $a+\omega$, folgende Zeichen der Functionen-
eihe zwischen $f^{(n+1)}$ und $f^{(n-i)}$, in denen $(-)^{i-1}$,
$-)^i$, $(-)^{i+1}$ $+$ oder $-$ andeutet, je nachdem $i-1$
nd i beziehlich gerade oder ungerade sind:

$$f^{(n+1)},\ f^{(n)},\ f^{(n-1)},\ f^{(n-2)} \ldots f^{(n-i+2)},\ f^{(n-i+1)},\ f^{(n-i)}$$

wenn $f^{(n+1)}(a)$ *und* $f^{(n-i)}(a)$ *positiv,*

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} + & - & + & - & \ldots & (-)^{i-1} & (-)^{i} & + \\ + & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & + \\ + & + & + & + & \ldots & + & + & + \end{array}\right\} (7)$$

wenn $f^{(n+1)}(a)$ *positiv und* $f^{(n-i)}(a)$ *negativ,*

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} + & - & + & - & \ldots & (-)^{i-1} & (-)^{i} & - \\ + & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & - \\ + & + & + & + & \ldots & + & + & - \end{array}\right\} (8)$$

wenn $f^{(n+1)}(a)$ *negativ und* $f^{(n-i)}(a)$ *positiv,*

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} - & + & - & + & \ldots & (-)^{i} & (-)^{i+1} & + \\ - & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & + \\ - & - & - & - & \ldots & - & - & + \end{array}\right\} (9)$$

wenn $f^{(n+1)}(a)$ *und* $f^{(n-i)}(a)$ *negativ,*

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} - & + & - & + & \ldots & (-)^{i} & (-)^{i+1} & - \\ - & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & - \\ - & - & - & - & \ldots & - & - & - \end{array}\right\} (10)$$

Um nun hier die Zahl der Zeichenwechsel ir Functionenreihe für $x=a-\omega$ mit der für $x=a+\omega$ zu vergleichen, müssen gerade und ungerade Werte von i unterschieden werden.

Sey i *gerade*, so ist die Zahl der Zeichenwechsel zwischen $f^{(n+1)}$ und $f^{(n-i)}$

für $(a-\omega)$: in(7)$=i$; in(8)$=i+1$; in (9)$=i+1$; in (10)$=i$
für $(a+\omega)$: in(7)$=0$; in(8)$=\ \ 1$; in (9)$=\ \ 1$; in (10)$=0$
Unterschied: in(7)$=i$; in(8)$=\ \ i$; in (9)$=\ \ i$; in (10)$=i$.

Sey i *ungerade*, so ist die Zahl der Zeichenwechsel zwischen $f^{(n+1)}$ und $f^{(n-i)}$

für $(a-\omega)$: in(7)$=i+1$; in(8)$=i$; in(9)$=i$; in(10)$=i+1$
für $(a+\omega)$: in(7)$=\ \ 0$; in(8)$=1$; in(9)$=1$; in(10)$=0$
Untersch.: in(7)$=i+1$; in(8)$=i-1$; in(9)$=i-1$; in(10)$=i+1$.

Hieraus ergiebt sich der Satz: *beim stetigen Durchgang von* x *durch einen Werth* a, *der ei*

[g]erade *Anzahl auf einander folgender mittlerer* [F]*unctionen verschwinden macht, verliert die Fun*[ct]*ionenreihe eine gleiche Anzahl von Zeichenwech*[se]*ln; verschwinden aber für* x=a *eine* ungerade [A]*nzahl mittlerer Functionen, so gehen in der Fun*[ct]*ionenreihe um eine Einheit* {*weniger* / *mehr*} *Zeichenwech*[se]*l als Functionen null geworden sind* (*in jedem* [F]*alle also eine* gerade *Anzahl derselben*) *verloren,* [je] *nachdem für* x=a *die Zeichen der den ver*[sc]*hwindenden nächstvorhergehenden und folgenden* [F]*unctionen* {*entgegengesetzt* / *einerlei*} *sind.*

Der Werth a würde hier zwar nicht eine reelle [W]urzel der ursprünglichen Gleichung $f(x)=0$, wohl [ab]er der i auf einander folgenden abgeleiteten $f^{(n)}(x)=0$ [f]$^{(n-1)}(x)=0, \ldots f^{(n-i+1)}(x)=0$ seyn.

Wäre also $i=1$, so gingen in der Functionen[re]ihe 0 oder 2 Zeichenwechsel verloren, übereinstim[m]end mit §. 132. Wäre $i=2$, so könnten nur zwei [ve]rloren gehen; dagegen für $i=3$, 2 oder 4 u. s. f.

§. 134.

Vierter Fall. Mache $x=a$ mehrere auf einan[de]r folgende Functionen am Ende der Reihe ver[sc]hwinden, z. B. j, so dass also

$$f^{j-1}(a)=f^{j-2}(a)=\ldots f''(a)=f'(a)=f(a)=0;$$

[m]ithin a eine reelle Wurzel der ursprünglichen und [de]r $j-1$ nächsten abgeleiteten Gleichungen ist, so ist [i]n den 4 Nummern des vorhergehenden §. in jeder [Ze]ichenreihe das letzte Zeichen zu streichen; dann [fa]llen die Verschiedenheiten der Resultate hinweg und [di]e *Functionenreihe verliert beim stetigen Durch*[ga]*ng durch* x=a, *welches* j *auf einander folgende* [F]*unctionen am Ende der Reihe verschwinden macht,* [ei]*ne gleiche Anzahl Zeichenwechsel.*

Es braucht kaum erinnert zu werden, dass in [di]esem Falle, nach §. 92, die Gleichung $f(x)=0$

die j-fache Wurzel a, oder $f(x)$ den binomischen Fa-
ctor $(x-a)^j$ hat.

Der *fünfte Fall* bietet keinen Stoff zu eigenthüm-
lichen Untersuchungen dar. Macht nämlich $x =$,
j Functionen am Ende und an mehreren Stellen der
Mitte i, i', i'' u. s. f. auf einander folgende Fun-
ctionen verschwinden, so wird für jede Folge dieser
null werdenden Functionen einzeln die Zahl der ver-
loren gehenden Zeichenwechsel berechnet und darnach
die Gesammtsumme bestimmt.

§. 135.

Ziehen wir jetzt die gemeinschaftlichen Ergebnisse
aus den im Vorstehenden einzeln behandelten Fällen.

Lässt man die Veränderliche x einer Gleichung
vom $m$ten Grade $f(x)=0$ von der untern Grenze der
negativen Wurzeln $-g$ bis zur obern der positiven
$+l$ stetig wachsen, so verliert die Reihe der ursprüng-
lichen und der sämmtlichen abgeleiteten Functionen

$$f^{(m)}(x), f^{(m-1)}(x), \ldots f''(x), f'(x), f(x),$$

welche, für $x=-g$, m Zeichenwechsel, für $x=+l$,
m Zeichenfolgen darstellt,

1) beim stetigen Durchgang durch jede reelle
einfache oder vielfache Wurzel der Gleichung $f(x)=0$
eben so vielmal einen Zeichenwechsel, als wie viel-
mal jede einzelne Wurzel vorkommt.

2) Die Functionenreihe kann aber auch Zeichen-
wechsel beim Durchgang durch Werthe von x verlie-
ren, die keine Wurzeln von $f(x)=0$, wohl aber von
irgend einer oder einigen abgeleiteten Gleichungen
$f^{(n)}(x)=0$, $f^{(n-1)}(x)=0$, ... sind; jedoch ist die
Anzahl der verlornen Zeichenwechsel in diesem Falle
immer eine *gerade*. Ist die Zahl der nullwerdenden
Functionen eine gerade, so gehen eben so viel Zei-
chenwechsel verloren; ist dieselbe ungerade, so gehen

n eine Einheit $\left\{\begin{matrix}\text{weniger}\\ \text{mehr}\end{matrix}\right\}$ Zeichenwechsel verloren, je
achdem für denselben Werth von x die beiden den
ullwerdenden nächstvorhergehenden und folgenden
unctionen $\left\{\begin{matrix}\text{entgegengesetzte}\\ \text{einerlei}\end{matrix}\right\}$ Vorzeichen haben.

3) Es giebt in allen 5 in Erwägung gezogenen
ällen, folglich, da kein 6ter hinzugefügt werden
ann, überhaupt keine Werthe von x, bei welchen
e Functionenreihe neue Zeichenwechsel gewinnen
ler schon verlorene wieder aufnehmen könnte.

4) Hat daher $f(x)=0$ nur reelle Wurzeln, so
önnen, da überhaupt nur m Zeichenwechsel verloren
ehen können, keine auf die in 2) angegebene Art
erschwinden.

5) Hat aber die Gleichung nur μ reelle Wurzeln,
 müssen auf die in 1) angezeigte Art μ, nach der
 2) erwähnten aber $m-\mu$ Zeichenwechsel verloren
ehen, jedoch auch nicht mehr und nicht weniger,
ermöge 3). Da letzteres immer nur in gerader An-
ahl geschehen kann, so muss auch $m-\mu$ als Summe
ller dieser geraden Zahlen *gerade* seyn. Da nun
§. 70) $m-\mu$ auch die Summe der verloren gegange-
en, d. i. der imaginären Wurzeln der Gleichung
$(x)=0$ ausdrückt, so ist die Zahl derselben genau
 gross, als diejenige der Zeichenwechsel, welche
ie Functionenreihe durch Nullwerden von mittleren
liedern verloren hat; womit auf eine neue Art bewie-
en ist, dass die imaginären Wurzeln nur in gerader
nzahl vorkommen können. Endlich wird man einen
olchen, verlorene Wurzeln anzeigenden Werth *die
telle* nennen können, *an der sie verloren gegan-
en sind.*

6) Dagegen können noch eine beliebige Anzahl
on Malen eine oder mehrere einzelne Functionen
$^{(n)}(x)$, $f^{(p)}(x)$ u. s. f., die nicht unmittelbar auf ein-
nder folgen, und deren nächstbenachbarte entgegen-
esetzte Zeichen haben, für gewisse Werthe von x

null werden, da in diesem Falle nie ein Zeichenwec- sel verschwindet.

7) Noch folgt aus 5) und 2), dass, wenn i auf ei- ander folgende mittlere Functionen für einen gewisse Werth von x null werden, daraus immer auf eine b- stimmte Anzahl imaginärer Wurzeln der Gleichun geschlossen werden kann, und zwar auf i, wenn i gerade ist, auf $i-1$, wenn i ungerade ist und die de null werdenden Functionen nächst benachbarten fü denselben Werth von x entgegengesetzte Zeichen h- ben; auf $i+1$, wenn i ungerade ist und jene benac- barten Functionen für denselben Werth von x eine- lei Zeichen geben. Eine neue Ableitung von D Gua's Satz (§. 126).

§. 136.

Offenbar wird es sich verhältnissmässig selte treffen, dass ein willkürlich gewählter Werth von in die Functionenreihe substituirt eine der Functione wirklich $=0$ macht; indess ergiebt sich doch aus di- sen Sätzen eine Methode zur *Begrenzung* der Wu- zeln im Einzelnen. Seyen nämlich a und b zwi innerhalb der äussersten Grenzen der Wurzeln li- gende reelle Werthe, und gebe nach Substitution vo $x=a$, oder, wie wir von nun an abgekürzt schreibe wollen, für (a), die Functionenreihe h Zeichenwec- sel, für (b) aber deren k, so ist $h-k$ nie negat, sondern $=0$, oder $=1$, 2, 3 u. s. f. Sey nun

1) $h-k=0$, so hat $f(x)=0$ zwischen a und b keine reelle Wurzel. Denn gäbe es eine solche $=$, so müsste beim stetigen Durchgang durch a die Fu- ctionenreihe einen Zeichenwechsel verlieren (§. 135, 1.

2) Sey $h-k=1$, so liegt eine, aber nur Ein, und zwar eine einfache Wurzel zwischen a und . (Ebendas. 1.)

3) Sey $h-k=2$, so *können* zwischen a und b *zwei reelle* Wurzeln liegen, nie aber mehr; do

ıch zwei *verloren* gegangen seyn. Letzteres wird att finden, wenn beim stetigen Durchgange von x ırch einen zwischen a und b nachzuweisenden Werth e Functionenreihe zwei Zeichenwechsel verliert, ohne ıss für jenen Werth $f(x)=0$ wird, sondern nur eine ler zwei auf einander folgende mittlere Functionen ırch Substitution desselben verschwinden (§. 135,7.).

4) Allgemein liegen zwischen a und b *nie mehr* elle Wurzeln als $h-k$ Einheiten hat.

Ist $h-k$ *ungerade*, so giebt es zwischen diesen Verthen wenigstens Eine reelle Wurzel.

Ist $h-k$ *gerade*, so können eben so viel reelle Vurzeln vorkommen, aber auch alle nur imaginär eyn, oder endlich in gerader Anzahl reelle sowohl als naginäre.

Im Allgemeinen lässt sich sagen, dass die Zahl er reellen Wurzeln zwischen a und b, $=h-k-\varDelta$ t, wo $\varDelta$ eine gerade Zahl oder Null und damit die lenge der imaginären Wurzeln bedeutet.

§. 137.

Durch eine sehr einfache Anwendung dieser Sätze elangen wir zu einem dritten Beweis von Descartes's ehrsatz. Sey nämlich zuerst $a=-g$ und $b=0$, soann $a=0$ und $b=+l$, so ist, mit Hinweglassung er positiven Coefficienten in $f(0)$, $f'(0)$ u. s. w.

	$f^{(m)}$,	$f^{(m-1)}$,	$f^{(m-2)}$,	....	f'',	f',	f
$(-g)$:	$+$	$-$	$+$	....	$(-)^{m-2}$	$(-)^{m-1}$	$(-)^{m}$
(0):	$+$	a_1	a_2	....	a_{m-2}	a_{m-1}	a_m
$(+l)$:	$+$	$+$	$+$	....	$+$	$+$	$+$

ählt man nun die Zeichenwechsel für (0) zusammen, ie offenbar in gleicher Anzahl als in der Gleichung

$$x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-2}x^2+a_{m-1}x+a_m=0$$

orkommen, und nennt diese Zahl k, so hat die Funtionenreihe, die für $(-g)$ durchaus Zeichenwechsel, lso deren m enthält, $m-k$ Zeichenwechsel von $(-g)$

bis (0) verloren; die Gleichung $f(x)=0$ hat also zw schen diesen Grenzen nicht mehr als $m-k$ reell Wurzeln, die sämmtlich negativ seyn müssen, od da $m-k$ zugleich die in (0), folglich auch in $f(x$ enthaltenen Zeichenfolgen ausdrückt: *die Gleichun* f(x)=0 *hat nicht mehr reelle negative Wurze als Zeichenfolgen.* Da nun für $(+l)$ die Functione reihe keinen Zeichenwechsel mehr enthält, also vo (0) bis $(+l)$ k Zeichenwechsel verloren hat, k ab zugleich die Zahl der Zeichenwechsel in $f(x)$ anzeig *so hat die Gleichung* f(x)=0 *nicht mehr reelle p sitive Wurzeln als Zeichenwechsel.* Beide Sät zusammen geben den Lehrsatz des Descartes.

§. 138.

Um nun die Sätze des §. 136 in Anwendung z bringen, wird man in der vorgegebenen Gleichur willkürliche Zahlwerthe von x substituiren, bis ma einerseits auf solche kommt, welche die Zeichen d Functionenreihe durchgängig positiv machen, andre seits zu solchen gelangt, bei denen diese Reihe durcha abwechselnde Zeichen enthält. Man wird sich hierbi im Allgemeinen am bequemsten der positiv und negat genommenen Potenzen von Zehn und der Null, al der Zahlen 0, ± 1, ± 10, ± 100.... bedienen. Ma wird jede der hierdurch erhaltenen Werthreihen hi sichtlich der Zahl der Zeichenwechsel mit der nächs vorhergehenden vergleichen und aus der Differe nach den entwickelten Regeln auf das Vorhandense oder nicht Vorhandenseyn von reellen oder imaginär Wurzeln schliessen. Diese Vergleichung der Za der Zeichenwechsel wird jedoch offenbar in den Fäll direct unausführbar, wo eine oder einige der Functi nen null werden. Gesetzt aber, dies geschehe für , so wird man $a+\omega$ oder $a-\omega$ substituiren und ω klein nehmen können, dass die für a verschwindend Functionen nicht mehr verschwinden, und doch

rigen Functionen nicht ihre Zeichen ändern. Angenommen also, es werde $f^{(n)}(a)=0$, so ist

$$f^{(n)}(a+\omega)=\omega f^{(n+1)}(a)+\frac{\omega^2}{2}f^{(n+2)}(a)+\frac{\omega^3}{2.3}f^{(n+3)}(a)+\ldots$$

$$f^{(n)}(a-\omega)=-\omega f^{(n+1)}(a)+\frac{\omega^2}{2}f^{(n+2)}(a)-\frac{\omega^3}{2.3}f^{(n+3)}(a)+\ldots$$

welchen Entwickelungen noch einige der Functionen $f^{(n+1)}(a)$, $f^{(n+2)}(a)$ u. s. f. verschwinden können. chreibt man indess die Functionen in der in §. 130 genommenen Ordnung, so ist aus Vorstehendem unittelbar klar, dass das Zeichen von $f^{(n)}(a+\omega)$ immer it dem der in der Reihe nächstvorhergehenden nicht rschwindenden Function übereinstimmt; das Zeichen on $f^{(n)}(a-\omega)$ dagegen wird mit dem der nächstvorergehenden nicht verschwindenden Function $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\\text{ungleichartig}\end{matrix}\right\}$ eyn, je nachdem die Zahl der dazwischenliegenden ullwerdenden eine $\left\{\begin{matrix}\text{ungerade}\\\text{gerade}\end{matrix}\right\}$ ist. Hieraus ergiebt sich lgende bequeme mechanische Vorschrift, die wir it Fourier die *Regel vom doppelten Zeichen* nenen wollen: Werden für einen Werth $x=a$ in der unctionenreihe an einer oder mehreren Stellen mehere auf einander folgende Functionen null, so erhält an die Zeichen der Reihe für einen unendlich nahen orhergehenden und einen unendlich nahen folgenden Verth, die wir durch $(<a)$ und $(>a)$ bezeichnen ollen, wenn man für $(>a)$ jede Null durch das Zeihen der nächstvorhergehenden nicht verschwindenden unction ersetzt, für $(<a)$ der ersten Null das entgeengesetzte von jener Function giebt, der zweiten das leiche, der dritten das entgegengesetzte, u. s. f.

Hiernach würde also z. B., wenn

(a) + + 0 0 0 − − 0 0 + − + 0 0 0 0 − − + 0 +,
$(>a)$ + + + + + − − − − + − + + + + + − − + + +
$(<a)$ + + − + − − − + − + − + − + − + − − + − +

Was den Gebrauch dieser Regel betrifft, so we- den nun, wenn bestimmt werden soll, wie viel zwische a und b Zeichenwechsel verloren gegangen sind, nachdem $b \gtreqless a$ mit den Zeichen der Substitution (die Zeichen der Reihe ($\gtreqless a$) verglichen werden müsse

§. 139.

Wir erläutern diese allgemeinen Sätze durch ei Reihe von Beispielen.

Sey 1)

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0, \text{ also}$$
$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 7$$
$$f''(x) = 6x - 8$$
$$f'''(x) = 6,$$

so wird

	f''',	f'',	f',	f	
für (—10)	+	—	+	—	} 1 reelle Wurzel
(—1)	+	—	+	+	
(0)	+	—	—	+	} 1 reelle W.
(1)	+	—	—	—	
(10)	+	+	+	+	} 1 reelle W.

Hier hat die Werthreihe (—1) einen Zeichenwecl sel weniger als (—10), welche nur Zeichenwechs enthält, daher —10 als untere Grenze der negative Wurzeln genommen werden kann, und zwischen —1 und —1 Eine reelle Wurzel der Gleichung liegt. Fe ner hat (0) eben so viel Zeichenwechsel als (—1 zwischen diesen Werthen liegt also keine Wurze Dagegen hat (1) wieder einen Zeichenwechsel wenig als (0), zwischen beiden Werthen liegt also aberma Eine reelle Wurzel. Endlich hat (10) einen Zeichenwecl sel weniger als (1), es ist also dazwischen die dritte reel Wurzel der Gleichung enthalten. Uebrigens giebt sicl da in (10) nur Zeichenfolgen vorkommen, die 10 a obere Grenze der positiven Wurzeln zu erkennen.

Sey 2)

$f(x)=x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101=0$, also

$f'(x)=5x^4-12x^3-72x^2+190x-46$

$f''(x)=20x^3-36x^2-144x+190$

$f'''(x)=60x^2-72x-144$

$f^{IV}(x)=120x-72$

$f^{V}(x)=120$,

so ist

	f^{V}	f^{IV}	f'''	f''	f'	f	
für (−10)	+	−	+	−	+	−	1 reelle Wurzel
(−1)	+	−	−	+	−	+	1 reelle W.
(0)	+	−	−	+	−	−	
(1)	+	+	−	+	+	−	3 Wurzeln.
(10)	+	+	+	+	+	+	

Von den zwischen (1) und (10) enthaltenen Wurzeln ist eine nothwendig reell, ob die beiden übrigen reell oder imaginär sind, lassen die bisherigen Regeln unentschieden.

Sey 3)

$f(x)=x^5+x^4+x^2-25x-36=0$, also

$f'(x)=5x^4+4x^3+2x-25$

$f''(x)=20x^3+12x^2+2$

$f'''(x)=60x^2+24x$

$f^{IV}(x)=120x+24$

$f^{V}(x)=120$,

so ist

	f^{V}	f^{IV}	f'''	f''	f'	f	
für (−10)	+	−	+	−	+	−	2 Wurzeln.
(−1)	+	−	+	−	−	−	
(<0)	+	+	−	+	−	−	2 imagin. WW.
(0)	+	+	0	+	−	−	
(>0)	+	+	+	+	−	−	
(1)	+	+	+	+	−	−	1 reelle W.
(10)	+	+	+	+	+	+	

Auch hier bleibt unentschieden, ob die beiden Wurzeln zwischen (−10) und (−1) reell oder imaginär

sind. Die imaginäre Beschaffenheit und die Zahl de imaginären Wurzeln bei 0 lässt sich auch ohne di Regel vom doppelten Zeichen, also ohne (<0) un (>0) aus De Gua's Satz erkennen.

Sey 4)

$$f(x)=x^4-4x^3-3x+23=0,$$

so ergiebt sich, wenn man die Ableitungen bildet,

	f^{IV},	f''',	f'',	f',	f	
für (<0)	+	−	+	−	+	
(0)	+	−	0	−	+	2 imagin. WV
(>0)	+	−	−	−	+	
(<1)	+	−	−	−	+	
(1)	+	0	−	−	+	
(>1)	+	+	−	−	+	2 Wurzeln.
(10)	+	+	+	+	+	

Obgleich also hier für $x=1$, $f'''(x)=0$ wird, s zeigt dies doch keine imaginären Wurzeln an, d zwischen (<1) und (>1) kein Zeichenwechsel verl ren geht, oder, nach de Gua's Satz, weil die benac barten Functionen f^{IV} und f'' ungleichartige Zeich haben. Die Beschaffenheit der beiden Wurzeln zw schen (1) und (10) bleibt auch hier unentschieden.

In den beiden vorstehenden Beispielen verschwa den nur einzelne mittlere Functionen; in den folge den werden deren mehrere null.

Sey 5)

$$f(x)=x^6-3x^3+7x^2-15x-8=0,$$

so ergiebt sich

	f^{VI},	f^{V},	f^{IV},	f''',	f'',	f',	f	
für (-1)	+	−	+	−	+	−	+	1 reelle Wurz.
(<0)	+	−	+	−	+	−	−	
(0)	+	0	0	−	+	−	−	2 imagin. WV.
(>0)	+	+	+	−	+	−	−	
(1)	+	+	+	+	+	−	−	2 Wurzeln
(10)	+	+	+	+	+	+	+	1 reelle W

Hier führt auch der Satz de Gua's auf das Re-
ltat, dass bei (0) zwei imaginäre Wurzeln liegen.

Sey 6)

$$f(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x-7=0,$$

ergiebt sich

	f^{IV},	f''',	f'',	f',	f	
für (—10)	+	—	+	—	+	1 reelle Wurzel
(<—1)	+	—	+	—	—	
(—1)	+	0	0	0	—	2 imaginäre WW.
(>—1)	+	+	+	+	—	
(0)	+	+	+	+	—	1 reelle Wurzel.
(1)	+	+	+	+	+	

Auch in diesem Beispiele sind die beiden imagi-
ren Wurzeln, ohne die Werthe (<—1) und (>—1)
bilden, nach De Gua's Satze erkennbar.

Sey 7)

$$f(x)=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+15x+17=0,$$

erhält man

	f^{V},	f^{IV},	f''',	f'',	f',	f	
für (—1)	+	—	+	—	+	—	1 reelle Wurzel.
(0)	+	—	+	—	+	+	
(<1)	+	—	+	—	+	+	4 imagin. WW.
(1)	+	0	0	0	+	+	
(>1)	+	+	+	+	+	+	

Auch hier gilt dieselbe Bemerkung, wie beim vo-
gen Beispiel. Ueberhaupt macht De Gua's Satz die
nwendung der Regel vom doppelten Zeichen überall
entbehrlich, wo nicht zugleich mit mittleren Fun-
ionen die letzte oder einige der letzten der Functio-
nreihe null werden.

§. 140.

Man wird bei Vergleichung der gegebenen Bei-
piele*) leicht finden, dass diejenigen Gleichungen, in

*) No. 2) bis 4) sind aus Fourier's Werke entlehnt, die übri-
n neu hinzugekommen.

deren linkem Theile Glieder fehlen, jederzeit imag-
näre Wurzeln haben. Dies ist bereits in §. 121 al-
gemein erwiesen. Doch kann hier noch ein zweite
und vollständigerer Beweis entwickelt werden. Se
die Gleichung

$$f(x)=x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_ix^{m-i}+a_{i+k}x^{m-i-k}+\ldots+a_m=$$

wo also zwischen a_i und a_{i+k} $k-1$ Glieder fehlen, di
übrigen vollständig seyn mögen, so ergiebt sich

$$f^{(m-i)}(x)=m(m-1)\ldots(i+1)x^i+(m-1)(m-2)\ldots i.a_1x^{i-1}$$
$$+(m-2)(m-3)\ldots(i-1)a_2x^{i-2}+\ldots+(m-i+1)(m-i)\ldots 2a_{i-1}x$$
$$+(m-i)(m-i-1)\ldots 2.1\,a_i$$

$$f^{(m-i-k)}(x)=m(m-1)\ldots(i+k+1)x^{i+k}$$
$$+(m-1)(m-2)\ldots(i+k)a_1x^{i+k-1}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(m-i)(m-i-1)\ldots(k+1)a_ix^k$$
$$+(m-i-k)(m-i-k-1)\ldots 2.1a_{i+k};$$

woraus leicht erhellt, dass

$$f^{(m-i-k)}(0)=(m-i-k)(m-i-k-1)\ldots 2.1a_{i+k};$$
$$f^{(m-i-k+1)}(0)=f^{(m-i-k+2)}(0)=\ldots=f^{(m-i-1)}(0)=0;$$
$$f^{(m-i)}(0)=(m-i)(m-i-1)\ldots.2.1\;a_i.$$

Da hiernach also $f^{(m-i-k)}(0)$ und $f^{(m-i)}(0)$ hinsicht-
lich ihres Zeichens beziehlich allein von a_{i+k} und a_i
abhängen, so können wir der Functionenreihe zw-
schen diesen Gliedern für (0), (<0) und (>0) nach
der Regel des doppelten Zeichens folgende Zeiche
geben:

	$\ldots f^{(m-i)}$,	$f^{(m-i-1)}$,	$f^{(m-i-2)}$	$\ldots$	$f^{(m-i-k+1)}$,	$f^{(m-i-k)}$ $\ldots$
(<0)	a_i	$(-1)^1a_i$	$(-1)^2a_i$	$\ldots$	$(-1)^{k-1}a_i$	a_{i+k} .
(0)	a_i	0	0	$\ldots$	0	a_{i+k} .
(>0)	a_i	a_i	a_i	$\ldots$	a_i	a_{i+k} .

wo also die Producte aus den ungeraden Potenzen vo
(-1) in a_i $\pm$ anzeigen, je nachdem a_i $\begin{Bmatrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{Bmatrix}$ ist. Hie
sind in der Reihe (0) $k-1$ Functionen null geworde

aben a_i und a_{i+k} *einerlei* Zeichen, und ist $k-1$ *ngerade*, so hat (>0) k Zeichenwechsel weniger s (<0), es sind also dann eben so viele imagiire Wurzeln vorhanden; ist $k-1$ *gerade*, so hat $>0)$ auch $k-1$ Zeichenwechsel weniger als (<0), es nd also auch $k-1$ imaginäre Wurzeln vorhanden. aben a_i und a_{i+k} *verschiedene* Zeichen, und $k-1$ ist *ngerade*, so hat (<0) nur $k-1$, aber (>0) Einen eichenwechsel, der Unterschied und die Zahl der naginären Wurzeln beträgt also $k-2$; ist endlich -1 *gerade*, so hat (<0) k Zeichenwechsel; (>0) eren einen; es giebt also dann $k-1$ imaginäre Wureln. Hieraus lässt sich folgendes Gesammtergebniss chen: *Fehlt in einer Gleichung eine* gerade *Anzahl uf einander folgender Glieder, so hat sie eben so iel imaginäre Wurzeln; ist aber die Anzahl der hlenden Glieder* ungerade, *so hat die Gleichung ne imaginäre Wurzel* $\left\{\begin{matrix}\textit{mehr}\\ \textit{weniger}\end{matrix}\right\}$ *als diese Anzahl inheiten, je nachdem die Coefficienten der Glieder, vischen welchen die fehlenden liegen,* $\left\{\begin{matrix}\textit{einerlei}\\ \textit{entgegengesetzte}\end{matrix}\right\}$ *eichen haben.* Diese imaginären Wurzeln sind jeerzeit als Wurzeln, die *bei Null* verloren gegangen nd, zu betrachten (§. 135, 5).

Dies stimmt vollkommen mit den am Ende von . 100 erhaltenen Resultaten überein; zugleich zeigt ch nun deutlich, dass auch ausser den hierdurch ernnten imaginären Wurzeln noch andere dergleichen orhanden seyn können, dann nämlich zunächst, wenn r noch andre Werthe als 0 mittlere Functionen null erden*); aber auch noch, wie wir in der Folge sen werden, unter andern Bedingungen, in den Fällen imlich, wo die bisherigen Regeln blos eine gerade nzahl Wurzeln angeben, ohne zu entscheiden, von elcher Art.

*) Vgl. z. B. (§. 139, 4).

§. 141.

Als Beispiele zu der Regel des vorigen §. dien zwar schon die Gleichungen 3, 4, 5 in §. 139. W fügen jedoch noch zwei neue hinzu.

Sey 1)

$$f(x)=x^7-2x^5-3x^3+4x^2-5x+6=0,$$

so fehlt ein Glied zwischen den beiden Anfangsgli dern. Hier ist also $a_i=1$, $a_{i+k}=-2$, $k-1=1$, dah zeigt diese Lücke *keine* imaginäre Wurzeln an. D gegen wird für das fehlende Glied zwischen x^5 u x^3, $a_i=-2$, $a_{i+k}=-3$, $k-1=1$, hieraus folg also *zwei* imaginäre Wurzeln. In der That, bild wir die Functionenreihe, so ergiebt sich

	f^{VII}	f^{VI}	f^{V}	f^{IV}	f'''	f''	f'	f	
(−10)	+	−	+	−	+	−	+	−	1 reelle W.
(−1)	+	−	+	−	+	+	−	+	
(<0)	+	−	−	+	−	+	−	+	
(0)	+	0	−	0	−	+	−	+	2 im. W.
(>0)	+	+	−	−	−	+	−	+	
									2 Wurze.
(1)	+	+	+	+	+	−	−	+	
									2 Wurze.
(10)	+	+	+	+	+	+	+	+	

Sey 2)

$$f(x)=x^5-10x^3+6x+1=0,$$

so ist zuerst $a_i=1$, $a_{i+k}=-10$, $k-1=1$, a keine imaginären Wurzeln; sodann $a_i=-10$, $a_{i+k}=$ $k-1=1$, also ebenfalls keine imaginären Wurze Diese Gleichung hat also wenigstens wegen der fe lenden Glieder keine imaginären Wurzeln. In d That, untersuchen wir sie näher, so findet sich

	f^{V},	f^{IV},	f''',	f'',	f',	f	
(—10)	+	—	+	—	+	—	1 reelle Wurzel.
($<$—1)	+	—	+	+	—	+	
(—1)	+	—	0	+	—	+	
($>$—1)	+	—	—	+	—	+	2 Wurzeln.
($<$0)	+	—	—	+	+	+	
(0)	+	0	—	0	+	+	
($>$0)	+	+	—	—	+	+	1 reelle Wurzel.
($<$1)	+	+	—	—	—	—	
(1)	+	+	0	—	—	—	
($>$1)	+	+	+	—	—	—	1 reelle Wurzel,
(10)	+	+	+	+	+	+	

so möglicherweise könnten nur noch zwischen (0) d (—1) zwei imaginäre Wurzeln liegen.

§. 142.

Statt dieser besondern könnten wir auch noch als lgemeinere Beispiele die Gleichungen

$$x^m + a_m = 0 \quad \text{und} \quad x^{2m} + a_m x^m + a_{2m} = 0$$

führen. Da diese indess schon am Ende des §. 100 ch derselben Regel untersucht worden sind, so üsste das dort Gefundene nur wiederholt werden. enden wir jedoch die allgemeine Methode auf sie , so ergiebt sich Folgendes.

Sey 1)

$$f(x) = x^m + a_m = 0, \text{ also}$$

$$f'(x) = mx^{m-1}$$

$$f''(x) = m(m-1)x^{m-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(m-2)}(x) = m(m-1)\ldots 4.3x^2$$

$$f^{(m-1)}(x) = m(m-1)\ldots 3.2x$$

$$f^{(m)}(x) = m(m-1)\ldots 2.1;$$

wird

	$f^{(m)}$,	$f^{(m-1)}$,	$f^{(m-2)}$	f'',	f',	f
$(-g)$	$+$	$(-)^1$	$(-)^2$	$(-)^{m-2}$	$(-)^{m-1}$	$(-)^m$
(<0)	$+$	$(-)^1$	$(-)^2$	$(-)^{m-2}$	$(-)^{m-1}$	a_m
(0)	$+$	0	0	0	0	a_m
(>0)	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	a_m
$(+l)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Sey hier zuerst m *gerade* und a_m *positiv*, so ha (<0) nur Zeichenwechsel, es ist also 0 die unter Grenze der Wurzeln, zugleich aber auch die ober da (>0) nur Folgen hat, also liegen bei 0 m ima ginäre Wurzeln.

Ist m *gerade*, aber a_m *negativ*, so hat (<0) a Ende eine Zeichenfolge, (>0) am Ende einen Ze chenwechsel; es werden also zwischen $-g$ und 0 s wohl als zwischen 0 und $+l$ einzelne reelle, dag gen bei 0 $m-2$ imaginäre Wurzeln liegen.

Wenn m *ungerade* und a_m *positiv*, so hat (< am Ende eine Folge, aber (>0) nirgends einen Ze chenwechsel, also ist 0 die obere Grenze. Es liege also zwischen $-g$ und 0 eine reelle, bei 0 ab $m-1$ imaginäre Wurzeln.

Wenn endlich m *ungerade*, aber a_m *negativ* is so hat (<0) nur Zeichenwechsel, ist also die unte Grenze, aber (>0) nur einen Zeichenwechsel a Ende. Es liegen demnach in diesem Falle $m-1$ im ginäre bei 0, und eine reelle Wurzel zwischen und $+l$.

Hieraus ergiebt sich folgende Uebersicht:

a_m	*m gerade*			*m ungerade*		
	$(-g)(0)$;	(0);	$(0)(+l)$	$(-g)(0)$;	(0);	$(0)(+$
$+$	0	m	0	1	$m-1$	0
$-$	1	$m-2$	1	0	$m-1$	1,

welche mit den §§. 82, 83 und 100 in Uebereinsti mung ist.

Wenn 2)

$f(x)=x^{2m}+a_m x^m+a_{2m}=0$, so ist

$f'(x)=2mx^{2m-1}+ma_m x^{m-1}$

$f''(x)=2m(2m-1)x^{2m-2}+m(m-1)\,a_m x^{m-2}$

. . . .

$f^{(m-1)}(x)=2m(2m-1)\ldots(m+2)x^{m+1}+m(m-1)\ldots 2a_m x$

$f^{(m)}(x)=2m(2m-1)\ldots(m+1)x^m+m(m-1)\ldots 2.\,1\,a_m$

$f^{(m+1)}(x)=2m(2m-1)\ldots(m+1)mx^{m-1}$

. . . .

$f^{(2m-1)}(x)=2m(2m-1)\ldots 3.2\,x$

$f^{(2m)}(x)=2m(2m-1)\ldots 2.1$;

[da]her

	$f^{(2m)}$,	$f^{(2m-1)}$,	...	$f^{(m+1)}$,	$f^{(m)}$,	$f^{(m-1)}$,	...	f',	f,
$(-g)$	$+$	$(-)^1$	...	$(-)^{m-1}$	$(-)^m$	$(-)^{m+1}$	...	$(-)^{2m-1}$	$(-)^{2m}$
(<0)	$+$	$(-)^1$	...	$(-)^{m-1}$	a_m	$(-)^1 a_m$	...	$(-)^{m-1} a_m$	a_{2m}
(0)	$+$	0	...	0	a_m	0	...	0	a_{2m}
(>0)	$+$	$+$	...	$+$	a_m	a_m	...	a_m	a_{2m}
$(+l)$	$+$	$+$	...	$+$	$+$	$+$	...	$+$	$+$

Ist nun erstens m *gerade* und a_m und a_{2m} *posi-*[ti]*v*, so hat (<0) keine Folge, also ist 0 die untere [G]renze, aber auch die obere, da dann (>0) nur aus [F]olgen besteht; also liegen in diesem Falle bei 0 [2]m imaginäre Wurzeln.

Wenn a_m *positiv* und a_{2m} *negativ*, so ist die [le]tzte Zeichenverbindung in (<0), aber auch nur sie, [ei]ne Folge, also liegt eine reelle Wurzel zwischen [−]g und 0. In (>0) ist die letzte Zeichenverbin-[du]ng allein ein Wechsel; folglich liegen bei 0 $2m-2$ [im]aginäre Wurzeln. Endlich enthält auch (>0) am [E]nde einen Wechsel, und daher liegt noch eine reelle [W]urzel zwischen 0 und $+l$.

Wenn a_m *negativ* und a_{2m} *positiv*, so hat (<0) [in] der Mitte und am Ende eine Zeichenfolge; im Zwi-

schenraum von $(-g)$ und (0) kommen demnach zwe
Wurzeln vor. Eben so hat (>0) in der Mitte und an
Ende einen Zeichenwechsel; folglich liegen bei (0
$2m-4$ imaginäre Wurzeln. Endlich finden sich vo
(0) bis $(+l)$ noch zwei Wurzeln.

Wird endlich a_m und a_{2m} *negativ*, so hat $(<0$
in der Mitte eine Folge, (>0) in der Mitte einen Wech
sel; es liegen also zwischen $(-g)$ und (0) und zwi
schen (0) und $(+l)$ einzelne reelle, bei (0) aber $2m-$
imaginäre Wurzeln.

Ist zweitens m *ungerade* und a_m *und* a_{2m} *positiv*
so bilden in (<0) sowohl $(-)^{m-1}$ und a_m als $(-)^{m-1}a$
und a_{2m} Folgen, alle übrigen Zeichen Wechsel; es lie
gen also zwischen $-g$ und 0 2 Wurzeln. Dan
aber hat (>0) nur Folgen, also ist 0 zugleich di
obere Grenze und bei 0 liegen $2m-2$ imaginär
Wurzeln.

Ist a_m *positiv* und a_{2m} *negativ*, so hat (<0) nu
für $(-)^{m-1}$ und a_m eine Folge, also nur einen Ze
chenwechsel weniger als $(-g)$, zwischen beiden lieg
also eine reelle Wurzel. Dann hat (>0) noch eine
Zeichenwechsel, also liegen zwar wieder $2m-2$ ima
ginäre Wurzeln bei 0, aber auch noch eine reel
zwischen 0 und $+l$.

Ist a_m *negativ* und a_{2m} *positiv*, so hat $(<0$
keine Folge, also ist hier 0 die untere Grenze. Dan
hat (>0) 2 Zeichenwechsel sowohl bei $+$ und a_m a
bei a_m und a_{2m}, also giebt es bei 0 $2m-2$ imag
näre Wurzeln; die übrigen zwei ihrer Gattung nac
unbestimmt bleibenden liegen zwischen 0 und $+l$.

Ist endlich a_m *und* a_{2m} *negativ*, so ist nur d
letzte Zeichenverbindung in (<0) eine Zeichenfolg
es liegt also eine reelle Wurzel zwischen $-g$ un
0. In (>0) kommt nur noch ein Zeichenwechse
nämlich bei $+$ und a_m vor, also liegen bei 0 $2m-$

naginäre Wurzeln, endlich liegt zwischen 0 und
-l noch eine reelle Wurzel.

Diese Ergebnisse können wir in folgender Ueber-
cht zusammenstellen:

		m gerade			m ungerade		
a_m	a_{2m}	$(-g)(0)$;	(0);	$(0)(+l)$	$(-g)(0)$;	(0);	$(0)(+l)$
+	+	0	$2m$i.	0	2W.	$2m-2$i.	0
+	—	1r.	$2m-2$i.	1r.	1r.	$2m-2$i.	1r.
—	+	2W.	$2m-4$i.	2W.	0	$2m-2$i.	2W.
—	—	1r.	$2m-2$i.	1r.	1r.	$2m-2$i.	1r.

bereinstimmend mit den §§. 86 und 100.

§. 143.

So weit wir bis jetzt Fourier's Methode zur Un-
erscheidung der Wurzeln vorgetragen haben, lehrt sie
ffenbar nur in den Fällen die imaginären Wurzeln er-
ennen, wo mit dem Verschwinden einer oder mehrerer
uf einander folgender mittleren Functionen für einen
ewissen Werth von $x=a$ zugleich der Verlust einer
eraden Anzahl von Zeichenwechseln der Functionen-
eihe zwischen zwei nächstbenachbarten Werthen $(<a)$
nd $(>a)$ verbunden ist, und damit leistet sie nicht mehr
ls de Gua's Satz; in denjenigen Fällen dagegen, wo
wischen zwei Werthen (a) und (b) zwei oder mehr als
wei Zeichenwechsel verloren gehen, bleibt es bis jetzt
nentschieden, ob zwischen a und b noch eine gerade
nzahl reeller Wurzeln zu suchen ist, oder diese ver-
oren gegangen und zu imaginären geworden sind. Ist
un die Zahl der verlornen Zeichenwechsel eine un-
erade, so muss vor Allem wenigstens noch Eine
eelle Wurzel innerhalb der gefundenen Grenzen a
nd b liegen und sich durch Annahme eines Zwischen-
erthes absondern lassen. Heisst dieser Werth, der
$>a$ und $<b$ seyn soll, c, so kannn dann die reelle
Vurzel zwischen a und c oder b und c liegen, die
brigen paarweise vorhandenen reellen oder imaginä-

ren Wurzeln liegen dann also beziehlich zwischen
und b oder c und a, ihre Natur aber bleibt eben s
ungewiss wie zuvor. In §. 139, 2 z. B. liessen sic
zwischen 1 und 10 drei Wurzeln erkennen: denn es wa

	f^{v},	f^{iv},	f''',	f'',	f',	f
für (1)	+	+	—	+	+	—
(10)	+	+	+	+	+	+

Substituiren wir nun, von (1) ausgehend, allmäli
die auf einander folgenden natürlichen Zahlen, so gieb

(2)	+	+	—	—	+	—

Es liegen also nun die drei Wurzeln zwischen 2 un
10. Substituiren wir nun 3 für x, so erhalten wi

(3)	+	+	+	—	—	—

Die Vergleichung von (2) und (3) und von (3) und (10
zeigt daher, dass die Eine reelle Wurzel in dem let
tern Zwischenraume liegt; von den beiden andern, di
nun zwischen 2 und 3 enthalten sind, bleibt es abe
immer noch ungewiss, ob sie reelle oder imaginär
seyn werden.

Wollte man nun fortfahren, die successiven Zal
len zu substituiren, so ist es allerdings möglich, das
sich hierdurch die beiden noch übrigen Wurzeln tren
ten und damit als reelle auswiesen; gelänge dies abe
nicht, so wäre dies Misslingen keineswegs ein Bewei
dass die beiden Wurzeln imaginäre seyen, da ja, wi
nahe an einander man auch die substituirten Zahle
wählen möge, doch immer noch andere dazwische
liegen, also, wenn man nicht zufällig auf einen Wert
käme, der eine mittlere Function verschwinden mac
te, man nie versichert seyn könnte, ob nicht gerad
ein solcher ungemein wenig von einem versuchte
Werthe verschiedener Zwischenwerth die reellen Wu
zeln trennte. Es würde daher im ungünstigen Fal
die Operation nie ein Ende nehmen. Dass übrige
das ganze Verfahren ein blosses unsicheres Probire
aber keine mit Gewissheit zum Ziele führende M
thode wäre, springt in die Augen.

Es könnte nun zwar die in §. 111 ff. vorgetragene Methode der kleinsten Differenz der reellen Wurzeln jetzt mit geringerer praktischer Unbequemlichkeit in Anwendung gebracht werden, indem man nur für diejenigen Zwischenräume, innerhalb deren Wurzeln in gerader Anzahl zu suchen sind, die Reihe

$$\Delta,\ 2\Delta,\ 3\Delta,\ldots.$$

zu bilden hätte. Allein da die Weitläufigkeit der Berechnung von Δ immer noch übrig bleibt, so ist eine andere, einfachere Methode hier immer noch für die praktische Rechnung Bedürfniss.

§. 144.

Eine solche Methode lässt sich nun der Betrachtung der den linken Theil der Gleichung darstellenden Curve abgewinnen.

Sey man durch Vergleichung der Anzahl der Zeichenwechsel auf dem bisher angegebenen Wege so weit gekommen, dass es nur noch ungewiss bleibt, ob *zwei* innerhalb zweier Werthe a und b liegende Wurzeln reelle oder imaginäre sind (wiewohl auch, was schon erwähnt wurde, es vorkommen kann, dass man über die Beschaffenheit von 4, 6 u. s. f. und jeder geraden Zahl von Wurzeln in Ungewissheit ist); so kann dies in Folge zweier Fälle eintreten. Entweder nämlich sind die beiden Zeichenwechsel, welche, vermöge dieser Voraussetzung, die Zeichenreihe (a) mehr als die (b) haben muss, in irgend welchen beliebigen Stellen derselben vorhanden, oder sie befinden sich in den letzten Stellen: dergestalt also, dass (a) mit zwei Zeichenwechseln und (b) mit zwei Zeichenfolgen schliesst. In diesem letztern Falle wird dann wieder zu unterscheiden seyn, ob die beiden Zeichenfolgen in (b) aus Minus- oder aus Pluszeichen bestehen.

Betrachten wir also diesen einfachsten Fall, auf den, wie wir bald sehen werden, alle übrigen sich

zurü ckführen lassen, zuerst, so besteht er darin, da
entweder

	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
für (a)	$+$	$-$	$+$
für (b)	$+$	$+$	$+$

oder

für (a)	$-$	$+$	$-$
für (b)	$-$	$-$	$-$

wird. Lassen wir in diesen Reihen das letzte Zeiche
weg, so folgt aus den vorhergehenden, dass die Gle
chung $f'(x)=0$ zwischen a und b *eine reelle* Wu
zel hat; lassen wir auch noch das vorletzte Zeiche
hinweg, so ergiebt sich, dass die Gleichung $f''(x)=$
zwischen a und b *keine* Wurzel haben kann. Es wec
selt also die Function $f''(x)$ zwischen diesen Grenze
ihr Zeichen nicht; d. h. nach der geometrischen Bede
tung derselben, die Curve kehrt für $x=a$ und $x=b$ un
alle Zwischenwerthe der Abscissenaxe dieselbe Seit
zu, hier die erhabene. Dagegen wechselt $f'(x)$ ih
Zeichen, und es giebt also in der $f(x)$ darstellende
Curve einen Punct zwischen den beiden Werthen $f($
und $f(b)$, in welchem die Berührende der Abscisse
axe parallel ist. Kennte man die Abscisse diese
Punctes, die γ heissen mag, so würde zwar $f'(\gamma)=$
aber $f(\gamma)$ entweder $=0$, oder >0 oder <0. De
erste dieser drei Fälle zeigt, wie uns schon läng
bekannt, die zwei gleichen Wurzeln an und lässt sic
ohne Hülfe von γ erkennen; die beiden andern ab
wissen wir bis jetzt noch nicht zu unterscheiden. Es i
klar, dass, wenn $f(\gamma)$ mit $f(a)$ und $f(b)$ *entgegengesetz*
Zeichen hat, unter Voraussetzung der erstern der be
den oben angeführten Zeichenverbindungen, die Curv
bei a und b der Abscissenaxe ihre erhabene Seite z
kehren und zwischen a und γ dieselbe einmal, zw
schen γ und b das zweitemal schneiden wird. Ha
dagegen $f(\gamma)$ *einerlei* Zeichen mit $f(a)$ und $f(b)$, s
liegt in allen drei Puncten die Curve auf derselbe

eite der Abscissenaxe; und da es nur einen Punct
iebt, in welchem die Berührende der Axe parallel
t, auch die Curve zwischen $x=a$ und $x=b$ keinen
Vendepunct hat, indem sonst gegen die Voraussetzung
wischen diesen Grenzen $f''(x)$ irgendwo null werden
üsste, so liegt in diesem Falle die Curve zwischen
und b ganz auf Einer Seite der Abscissenaxe
nd kehrt ihr überall die erhabene Seite zu. Diese
er Fälle stellen die Figg. 35 bis 38 dar, in welchen
der Anfang der Abscissen, $OA=a$, $OB=b$, $O\gamma=\gamma$,
t die parallele Berührende, α und β die Durch-
hnittspuncte, also $O\alpha$, $O\beta$ die den reellen Wurzeln
ntsprechenden Werthe von x sind.

§. 145.

Um nun, auch ohne γ zu kennen, den Fall der
naginären Wurzeln von dem der reellen zu unter-
cheiden, dient folgende Construction, zu deren End-
gebnissen wir später auch auf einem anderen Wege
elangen werden. Ziehen wir an den, den Abscissen
A, OB (Fig. 39) in der Curve entsprechenden Pun-
en M und N die Berührenden, und nennen deren
inschnittspuncte in die Abscissenaxe beziehlich A'
nd B', so liegen diese nothwendig auf der erhabe-
en Seite der Curve, da die Berührende ganz auf
ner und derselben Seite liegt, und weder *bei* M
nd N noch *dazwischen* ein Wendepunct sich befin-
et. Errichten wir nun in A', B' die neuen Ordina-
n $A'M'$, $B'N'$, und ziehen an die Puncte der Curve
I' und N' abermals die Berührenden, so werden auch
eren Einschnitte in die Axe A'', B'' noch auf der
habenen Seite der Curve liegen u. s. f. Wie viel
al man daher auch diese Construction wiederholen
öge, so werden die Einschnitte der Berührenden den
urchschnittspuncten α und β von der erhabenen Seite
er Curve her zwar immer näher rücken, nie aber
e ganz erreichen, viel weniger überschreiten und

auf die hohle Seite der Curve gelangen. Dies könn
wir auch so ausdrücken: *Die Summe der absol*
genommenen Subtangenten zweier Puncte der Cu
ve, zwischen denen dieselbe noch zwei Durchschnit
mit der Abscissenaxe hat, ist immer kleiner a
der Unterschied der Abscissen dieser Puncte; ode
mit Beziehung auf die Figur, es ist:

$$AA' + BB' < AB;\ A'A'' + B'B'' < A'B';$$
$$A''A''' + B''B''' < A''B'' \text{ u. s.}$$

Es liegt nahe, dass dieser Satz auch noch gi
wenn die beiden Durchschnitte in Einen zusammeng
rückt sind, die Curve die Abscissenaxe in γ berüh
und also (Fig. 40) γ zwei gleiche Wurzeln bedeut.
Denn auch hier wird keiner der Einschnittspuncte A',
A'' u. s. f., oder B', B'' u. s. f. mit γ zusammenfa-
len, viel weniger es überschreiten. Gäbe es nämli
einen Punct, z. B. M'', dessen Berührende die Absc-
senaxe in γ schnitte, so hätte diese Berührende, d
γ auch auf der Curve liegt, mit letzterer zwei Punc
M'' und γ, die nicht zusammenfallen, gemein, wa
hier, wo zwischen M und N kein Wendepunct vo-
kommt, unmöglich ist.

Dagegen hören obige Ungleichungen auf allg-
mein gültig zu seyn, sobald die Curve von der A-
scissenaxe weder geschnitten noch berührt wird, wi
die Gründe, welche die angegebene Beschränkung de
Summe der Subtangenten bedingten, hier nicht me
statt finden. Diese Summe ist daher hier unbeschränk
und *kann* gleich oder grösser als der Unterschied de
Abscissen seyn, ja es kann sogar schon Eine der Subta-
genten diese Differenz übertreffen; obwohl andererse
doch keine allgemeine Nothwendigkeit dazu vorhand
ist. Da nun diese Lage der Curve zweien verlor
gegangenen Durchschnitten, also zwei imaginär
Wurzeln der Gleichung entspricht, so wird, wenn ma,
unter den hier gegebenen Voraussetzungen, die zu d
Werthen a und b gehörigen Subtangenten berechn

nd einzeln oder in Summe $\overline{\overline{>}}\ b-a$ findet, dies ein
cheres Anzeichen zweier zwischen a und b enthalte-
en imaginären Wurzeln seyn. Findet sich aber die-
elbe Summe $< b-a$, so lässt sich unmittelbar nicht
ntscheiden, ob die zwei Wurzeln reell oder imaginär
nd im ersten Falle gleich oder ungleich seyn mögen,
idem diese Bedingung in allen drei Lagen der Curve
rfüllt seyn kann.

In Fig. 41, welche den dritten Fall erläutert, ist
war $AA' + BB' < AB$, aber sowohl $A'A''$ als $B'B''$,
och mehr also ihre Summe $> A'B'$.

§. 146.

Bevor wir untersuchen, was weiter geschehen muss,
m in dem eben bezeichneten ungünstigen Falle über
ie Natur der beiden eingeschlossenen Wurzeln zu
ntscheiden, drücken wir die gefundene Bedingung
uvor analytisch aus. Da nach §. 52 die Subtangente
ir den Punct, dessen Abscisse x, $= \frac{f(x)}{f'(x)}$, nach der
oraussetzung aber hier $f'(a)$ negativ ist, die Sub-
angente aber absolut genommen werden soll, so ist
ie absolute Länge der zu a gehörigen Subtangente
nter Annahme einer positiven Ordinate*) $= -\frac{f(a)}{f'(a)}$.
ür (b) dagegen, wo $f'(b)$ positiv ist, wird sie $= \frac{f(b)}{f'(b)}$
eyn. Wir erhalten daher für das Vorhandenseyn
naginärer Wurzeln das Kennzeichen:

$$\frac{f(b)}{f'(b)} + \frac{f(a)}{-f'(a)} \overline{\overline{>}}\ b-a.$$

---

*) Ist die Ordinate negativ, so gilt das entgegengesetzte Zei-
hen. Man wird aber immer ganz kurz und einfach die absoluten
ahlwerthe von $\frac{f(b)}{f'(b)}$ und $\frac{f(a)}{f'(a)}$ zu *addiren* haben.

Findet sich aber diese Summe $<b-a$, so kann ma
zuerst einen zwischen a und b liegenden Werth c wä-
len und untersuchen, ob $f(c)$ mit $f(a)$ und $f(b)$ eine-
lei Zeichen hat oder nicht. Sind die Zeichen entg-
gengesetzt, so folgt aus §. 107, dass zwischen a u
c eine, zwischen c und b eine andre reelle Wurz
liegt; es ist also dann entschieden, und die Wurze
sind getrennt. Hat aber $f(c)$ mit $f(a)$ und $f(b)$ eine-
lei Zeichen, so können wenigstens nicht die Zeich
von allen drei Werthen $f'(c)$, $f'(a)$ und $f'(b)$ einerl
seyn, da die beiden letztern, nach der Voraussetzun,
entgegengesetzte haben. Habe z. B. $f'(c)$ das entg-
gengesetzte Zeichen von $f'(b)$, so wird nun die Gl-
chung $f'(x)=0$ zwischen den neuen Grenzen c und
eine reelle Wurzel haben. Es wird also nun

	$f''(x)$,	$f'(x)$,	$f(x)$
für (c)	$\pm$	$\mp$	$\pm$
für (b)	$\pm$	$\pm$	$\pm$

d. h. es finden jetzt in Beziehung auf c und b dies-
ben Verhältnisse statt, die vorher von a und b galte.
Man wird demnach untersuchen, ob

$$\frac{f(b)}{f'(b)}+\frac{f(c)}{-f'(c)} \geqq b-c.$$

Ist dies nicht der Fall, so wird man eine zwischen b
und c liegende Grösse d wählen, und untersuchen, o
$f(d)$ einerlei oder entgegengesetzte Zeichen mit $f()$
und $f(c)$ hat u. s. f. Dieses Verfahren hinlängli
weit fortgesetzt wird immer sicher die reellen od
die imaginären Wurzeln zu erkennen geben, inde
sich dabei die Grenzen, zwischen denen die Wurze
liegen, mehr und mehr zusammenziehen.

Da als Kennzeichen für das Vorhandenseyn re-
ler Wurzeln die Verschiedenheit der Zeichen von $f()$
und $f(c)$ oder $f(c)$ und $f(d)$ u. s. f. angenommen i,
so muss bemerkt werden, dass dieses nicht ausreic,
wenn die reellen Wurzeln gleich sind, mithin die Cur
die Axe nur berührt. Allein dieser Fall lässt sich, v

iher gelehrt worden ist, leicht unterscheiden. Man rd nämlich vor der Wahl der Zwischengrössen c, d s. f. zu untersuchen haben, ob $f(x)$ und $f'(x)$ ein gemeinschaftlichen rationalen Factor besitzen. ebt es einen solchen und heisst er $\varphi(x)$, so wird nn weiter zu ermitteln seyn, ob die Gleichung $x)=0$ zwischen a und b eine reelle Wurzel c' hat: nn nur dann wird die Gleichung $f(x)=0$ zwischen nselben Grössen die zweifache reelle Wurzel c' ben.

§. 147.

Die gewonnene Regel ist unmittelbar nur auf die eispiele §. 139, 2 und 3 und §. 141, 2 anwendbar.

In §. 143 hat sich gezeigt, dass von den drei im eispiel 2) des §. 139 zwischen 1 und 10 liegenden urzeln die eine reelle zwischen 3 und 10 zu suchen , die beiden andern ihrer Natur nach näher zu be- mmenden aber genauer zwischen 2 und 3 liegen. Sez- n wir daher $a=2$, $b=3$, so ergiebt sich

$$f(a)=-21;\ f'(a)=+30;\ f(b)=-32;\ f'(b)=-43.$$

Es sind also die absoluten Werthe von $\frac{f(a)}{f'(a)}$ und $\frac{f(b)}{f'(b)}$ beziehungsweise $\frac{21}{30}$ und $\frac{32}{43}$. Ueberdies ist $b-a=1$. ber

$$\frac{21}{30}+\frac{32}{43}>1,$$

e Wurzeln zwischen (2) und (3) sind also imaginäre.

In §. 139, 3 lagen noch zwei näher zu bestimmende urzeln zwischen -1 und -10. Es ist also hier $=-1$, $b=-10$. Hieraus ergiebt sich der abso- te Werth von $\frac{f(a)}{f'(a)}=\frac{10}{26}$; der von $\frac{f(b)}{f'(b)}=\frac{89686}{45955}$; dlich der absolute Werth von $b-a=9$.

Aber es ist $\frac{89686}{45955}+\frac{10}{26}<9$;

es ist also noch unentschieden, ob die zu bestimme-
den Wurzeln imaginäre sind oder nicht. Es ist nu
zunächst zu untersuchen, ob sie vielleicht zwei gleich
reelle seyn mögen, was der Fall seyn würde, wenn

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^2 - 25x - 36, \text{ und}$$
$$f'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 2x - 25,$$

einen gemeinschaftlichen Theiler, und dieser $=0$ ge-
setzt, zwischen -1 und -10 eine reelle Wurzel hätte.
Ein solcher Theiler findet sich aber nicht. Wir neh-
men nun weiter einen Werth zwischen -1 und -10,
also zuerst -2, so ergiebt sich

	f^{V}	f^{IV}	f'''	f''	f'	f	
(-10)	+	−	+	−	+	−	} 1 reelle W.
(-2)	+	−	+	−	+	+	
(-1)	+	−	+	−	−	−	} 1 reelle W.

Es sind also beide Wurzeln reell und durch -2 von
einander gesondert.

Im zweiten Beispiel des §. 141 endlich lagen zwi-
schen 0 und -1 zwei zu bestimmende Wurzeln. In
demselben war

$$f(x) = x^5 - 10x^3 + 6x + 1; \text{ daher}$$
$$f'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 6.$$

Setzen wir also $a=0$, $b=-1$, so wird der absolute
Werth von $b-a=1$, von $\frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{1}{6}$, von $\frac{f(b)}{f'(b)} = \frac{4}{19}$.
Aber es ist

$$\frac{1}{6} + \frac{4}{19} < 1.$$

Einen gemeinschaftlichen Theiler von $f(x)$ und
$f'(x)$ giebt es nicht. Substituiren wir daher den Zwi-
schenwerth $c = -\frac{1}{2}$, so wird $f(c) = -\frac{25}{32}$, also ent-
gegengesetzt den positiven Werthen von $f(0)$ und
$f(-1)$. Die Wurzeln sind also durch $c = -\frac{1}{2}$ getrennt,
und demnach beide reell.

§. 148.

Wir wollen nun zeigen, dass die im §. 146 ge-
ndene Regel zur Unterscheidung der imaginären
urzeln nicht blos für den beschränkten Fall gilt,
die Functionenreihe

$$\text{für } (a) \text{ mit } \quad \pm \quad \mp \quad \pm,$$
$$\text{für } (b) \text{ mit } \quad \pm \quad \pm \quad \pm$$

hliesst, sondern auch bei jeder beliebigen andern
raussetzung anwendbar ist. Zu diesem Ende be-
erken wir in jeder der verschiedenen Zeichenrei-
n, welche der Functionenreihe untergeschrieben
id, die Anzahl der Zeichenwechsel, welche bis zu
lem einzelnen Zeichen wirklich vorgekommen sind,
rch (überzuschreibende oder, wie in der Folge im-
er, nur in Gedanken festzuhaltende) Zahlen; also
B. in §. 141, 1 für die Reihen (—10), (>0) und
auf folgende Art:

$$\begin{array}{lcccccccc}
(-10) & \overset{0}{+} & \overset{1}{-} & \overset{2}{+} & \overset{3}{-} & \overset{4}{+} & \overset{5}{-} & \overset{6}{+} & \overset{7}{-} \\
(>0) & \overset{0}{+} & \overset{0}{+} & \overset{1}{-} & \overset{1}{-} & \overset{1}{-} & \overset{2}{+} & \overset{3}{-} & \overset{4}{+} \\
(1) & \overset{0}{+} & \overset{0}{+} & \overset{0}{+} & \overset{0}{+} & \overset{0}{+} & \overset{1}{-} & \overset{1}{-} & \overset{2}{+}
\end{array}$$

a aber nicht die Zahl dieser Zeichenwechsel, son-
rn die Differenz dieser Zahlen in zwei benachbarten
ichenreihen für die Erkennung der Wurzeln von
ichtigkeit ist, so bilden wir diese Differenzen, schrei-
n sie — und in der Folge immer nur sie, nicht die
erwähnten Zahlen — zwischen die zugehörigen
ihen und Zeichen, und wollen sie *Indices* nennen,
sie angeben, wie viel Wurzeln zwischen den ge-
hlten Grenzen diejenige Gleichung hat, die ent-
ht, wenn man die Function, welcher der Index zu-
hört, $=0$ setzt. Mit Hinzufügung dieser Indices
ht nun das obige Schema so aus:

(−10)	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{-}$	$\overset{2}{+}$	$\overset{3}{-}$	$\overset{4}{+}$	$\overset{5}{-}$	$\overset{6}{+}$	$\overset{7}{-}$
	0	1	1	2	3	3	3	3
(>0)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{-}$	$\overset{1}{-}$	$\overset{1}{-}$	$\overset{2}{+}$	$\overset{3}{-}$	$\overset{4}{+}$
	0	0	1	1	1	1	2	2
(1)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{-}$	$\overset{1}{-}$	$\overset{2}{+}$

In demselben Beispiele würde die Reihe der I
dices für (−10) und (1), wenn wir die Zahlen, a
denen sie gebildet werden, weglassen, folgende We
the und Stellungen annehmen:

(−10)	+	−	+	−	+	−	+	−
	0	1	2	3	4	4	5	5
(1)	+	+	+	+	+	−	−	+

In diesem letztern Schema ist also z. B. 5 d
Index der Gleichung $f(x)=0$, aber auch der Gl
chung $f'(x)=0$; 3 der von $f^{\mathrm{IV}}(x)=0$ u. s. f., und zw
immer für die Grenzen −10 und 1.

Ganz im Allgemeinen mögen für die Grenzen
und b die den Functionen

$$f^{(m)},\ f^{(m-1)},\ f^{(m-2)},\ \ldots\ldots\ f'',\quad f',\quad f$$

zugehörigen Indices beziehungsweise durch

$$0,\quad \delta',\quad \delta'',\quad \ldots\ldots\ \delta^{(m-2)},\ \delta^{(m-1)},\ \delta^{(}$$

bezeichnet werden, wobei jedoch schon aus den v
stehenden Beispielen ersichtlich ist, dass häufig m
rere benachbarte Indices einen und denselben Za
werth haben werden. Unabhängig von einzelnen B
spielen ergiebt sich aber der für das Nachfolge
wichtige Satz: *dass, wenn* $\delta^{(n)}$ *irgend einen die
Indices bedeutet, sowohl der ihm zunächst vorh
gehende als folgende entweder* $\delta^{(n)}-1$ *oder* $\delta^{(n)}+1$
ist. Denn heissen die Zahlen, deren Differenz $\delta^{(}$
ausdrückt, μ und ν, so dass also $\delta^{(n)}=\mu-\nu$, w
μ, ν die Zahlen der Zeichenwechsel bedeuten, die
den beiden verglichenen Zeichenreihen bis zum Ind
$\delta^{(n)}$ oder, was dasselbe ist, bis zu der Function $f^{(n)}$

rkommen, so geht μ entweder $\mu-1$ voraus oder
enfalls μ; denn entweder hat $f^{(m-n)}$ mit $f^{(m-n+1)}$
rschiedene oder einerlei Zeichen; im ersten Falle
i also bei $f^{(m-n)}$ ein neuer Zeichenwechsel hinzuge-
mmen, im andern ist die Zahl derselben nicht
rmehrt worden.

Demnach ist, wenn $\delta^{(n)} = \mu - \nu$,

$$\begin{aligned} \text{entweder } \delta^{(n-1)} &= \mu - \nu = \delta^{(n)}; \\ \text{oder } \quad &= \mu-(\nu-1) = \delta^{(n)}+1; \\ \text{oder } \quad &= (\mu-1)-\nu = \delta^{(n)}-1; \\ \text{oder } \quad &= (\mu-1)-(\nu-1) = \delta^{(n)}. \end{aligned}$$

en so folgt, dass

$$\begin{aligned} \text{entweder } \delta^{(n+1)} &= \delta^{(n)}; \\ \text{oder } \quad &= \delta^{(n)}+1; \\ \text{oder } \quad &= \delta^{(n)}-1 \text{ ist.} \end{aligned}$$

§. 149.

Nach dieser Bezeichnung wird nun, wenn zwischen
n Reihen (a) und (b), $\delta^{(m)}=0$ ist, keine Wurzel
ıerhalb dieser Grenzen vorhanden seyn.

Ist $\delta^{(m)}=1$, so wissen wir zwar aus dem Vor-
rgehenden, dass dann jedenfalls eine, aber auch
ht mehr als Eine reelle Wurzel zwischen a und b
suchen ist, die Indices $\delta^{(m-1)}$, $\delta^{(m-2)}$ u. s. f. mögen
s immer für Werthe haben; für die Folge jedoch,
gelehrt werden wird, wie aus den Grenzen der
urzeln diese selbst zu berechnen sind, werden diese
erthe nicht mehr gleichgültig für uns seyn. Wir
rden nur dann eine Wurzel als völlig getrennt und
e Grenzen zur Wurzelberechnung geeignet betrachten
nnen, wenn die Werthe der drei letzten Indices be-
hlich 0 0 1 sind. Dass dies jederzeit durch Zu-
mmenziehung der Grenzen zu erreichen ist, lässt
h sogleich zeigen. Unter Voraussetzung von $\delta^{(m)}=1$
nn nämlich, nach dem vorigen §., $\delta^{(m-1)}$ nur $=2$

oder $=1$ oder $=0$ seyn. Im ersten Falle wird die Gle
chung $f'(x)=0$ zwei Wurzeln, im andern Eine reell
Wurzel zwischen a und b haben; in beiden Fällen abe
werden sich Grenzen a', b' *zwischen* a und b finde
lassen, innerhalb deren kein Wurzelwerth liegt, un
für die also $\delta^{(m-1)}=0$ seyn muss. Denn der einzig
Ausnahmefall, der hier gedenkbar wäre, der nämlic
wo zwei oder mehrere *gleiche* Wurzeln zwischen zw
Grenzen enthalten sind, kann hier nicht statt finde
weil dann die Gleichung $f(x)=0$ eine Wurzel meh
als $f'(x)=0$ haben müsste, gegen die Voraussetzun
des Index $\delta^{(m)}=1$, vermöge dessen sie nur Eine Wu
zel zwischen a und b hat. Da demnach die Wurz
von $f(x)=0$ niemals mit einer Wurzel von $f'(x)=$
zusammenfallen kann, so zeigt sich nun auch leich
dass dieselben Grenzen a', b', zwischen denen kei
Wurzel von $f'(x)=0$ liegt, zugleich die Eine Wurz
α von $f(x)=0$ enthalten können. Denn wie nahe
α auch Wurzeln von $f'(x)=0$ liegen mögen, so wi
man immer noch zwischen dieselben und α die Gren
a' oder b' setzen können, so dass diese beiden *nun*
und keine Wurzel von $f'(x)=0$ einschliessen.

Was hier vom Index $\delta^{(m-1)}$ in Beziehung auf $f'($
gesagt ist, lässt sich leicht auf $\delta^{(m-2)}$ in Beziehu
auf $f''(x)$ übertragen, alles aber anschaulich erlä-
tern. Sey nämlich in Fig. 42 α der Durchschnitt, a
$O\alpha$ die Wurzel von $f(x)=0$; bei μ und ν seyen Maxim
also die Abscissen dieser Puncte Wurzeln von $f'(x)=$
bei ϱ sey ein Wendepunct, also dessen Abscisse e
Wurzel der Gleichung $f''(x)=0$, so wird seyn

	$\delta^{(m-2)}$	$\delta^{(m-1)}$	$\delta^{(m)}$
zwischen A und B	1	2	1
. . . . A und B''	1	1	1
. . . . A und B'	0	1	1
. . . . A' und B	1	1	1
. . . . A' und B''	1	0	1
. . . . A' und B'	0	0	1

§. 150.

Sey jetzt für a und b $\delta^{(m)} \overline{\gtrless} 2$. Wenn $\delta^{(m)}=2$
ıd dabei $\delta^{(m-1)}=1$, $\delta^{(m-2)}=0$, so wissen wir, nach
ır Regel des §. 146, die imaginären Wurzeln von
ın reellen zu unterscheiden. Denn die dieser zum
runde liegenden Zeichen der Functionen f, f', f'',
e sie durch die Figuren 35 bis 38 versinnlicht wer-
ın, geben diese Werthe der Indices. Wir werden
ın zeigen, dass für hinlänglich enge Grenzen entwe-
ır dieselbe Folge der Indices irgendwo in der Mitte
ır Functionenreihe sich ergiebt und damit jene Regel
eder anwendbar wird, oder dass sich ohne dieselbe
e zu untersuchenden Wurzeln trennen lassen und da-
it sich als reelle ausweisen.

Denn man durchlaufe die Reihe der für die Gren-
ın a und b gültigen Indices von der Rechten zur Linken
ıd bleibe bei dem ersten derselben stehen, der $=1$ ist.
ass es einen solchen geben muss, ist klar, da, nach
148 a. E., die Indices nur um einzelne Einheiten
- oder zunehmen, der erste Index zur Linken aber
ımer $=0$ ist. Gehöre dieser Index zur Function
$^{(n)}(x)$, so dass also $\delta^{(m-n)}=1$; so ist der benach-
ırte Index zur Rechten $\delta^{(m-n+1)}$ *nicht* $=1$: denn
ınn wäre $\delta^{(m-n)}$ nicht der erste Index, der $=1$;
ıch ist $\delta^{(m-n+1)}$ *nicht* $=0$: denn dann müsste, da
$^{m)} \overline{\gtrless} 2$, einer der nächsten Indices zur Rechten $=1$
ıyn, abermals gegen die Voraussetzung. *Es ist also*
$^{m-n+1)}=2$. Auf der andern Seite ist für dieselben
renzen a, b, entweder $\delta^{(m-n-1)}=0$ und damit die
olge der Indices 0, 1, 2, also zur Anwendung der
egel des §. 146 geeignet; oder *nicht* $=0$, folglich
$=1$ oder $=2$. In diesem letztern Falle aber, den
ir als den einfachern vorausschicken, ist aus dem
ırhergehenden §. klar, wenn man das, was daselbst
ın $f(x)$ und $\delta^{(m)}$ gesagt ist, auf $f^{(n)}(x)$ und $\delta^{(m-n)}$

überträgt, dass *zwischen* a und b sich immer Wertl a', b' werden finden lassen, zwischen denen $f^{(n+1)}(x)=$ keine Wurzel hat und daher $\delta^{(m-n-1)}=0$ wird. Hie durch zerfällt nun das Intervall ab in die drei Inte valle $a\,a'$, $a'b'$, $b'b$, von denen das mittlere die dur den Index $\delta^{(m-n)}=1$ zwischen a und b angezeig Wurzel von $f^{(n)}(x)=0$ enthält, der Werth desselb Index in den übrigen beiden also $=0$ ist. Findet si also innerhalb *dieser* Intervalle $a\,a'$ und $b'b$ ein od mehrmal ein Index, der $=1$, *so gehört er jedenfa einem spätern Gliede der Functionenreihe zu als d erste Index* 1 *im Intervall* $a\,b$. Was das mittle Intervall $a'b'$ betrifft, so ist entweder auch hier $\delta^{(m-}$ der erste Index, der $=1$ wird, oder, wie in den a dern Intervallen, findet sich dieser Werth schon w ter zur Rechten. Im letztern Falle wird dann *au hier, durch die Zerlegung des Intervalls* a b *in e gere, der erste Index* 1 *in eine dem Ende der Rei näher liegende Stelle gebracht*, und er wird dal durch Wiederholung des Verfahrens und Anwendu desselben auf jedes der Intervalle, wofern auch l der Wiederholung nicht der andere — sogleich weit zu erörternde — Fall eintritt, allmälig bis ins letz Glied rücken, so dass dann die beiden oder mehrer Wurzeln, über deren Natur man ungewiss war, g trennt werden und sich damit als reelle ergeben. t aber auch im Intervall $a'b'$, wie in $a\,b$, $\delta^{(m-n)}$ der er Index, der $=1$, so ist $\delta^{(m-n+1)}=2$ und $\delta^{(m-n-1)}$ entw der $=0$, wo dann die ganze Folge der Indices w der 0, 1, 2, und daher die Regel des §. 146 anwe bar ist, oder *nicht* $=0$, in welchem letztern Fa das Intervall $a'b'$ weiter zu zertheilen ist. Es blei daher offenbar nur noch zu untersuchen übrig, welc Folgen die Anwendung der Regel des §. 146 auf d successiven mittleren Functionen, deren Indices 0, 1 sind, in Beziehung auf die Wurzeln der ursprüng chen Gleichung $f(x)=0$ hat.

§. 151.

Seyen also für das Intervall $a\ b$
e den Functionen $f^{(n+1)}, f^{(n)}, f^{(n-1)}$
gehörigen Indices 0, 1, 2;
hat die Gleichung $f^{(n-1)}(x)=0$ zwischen a und b
ei Wurzeln. Bildet man die Ausdrücke

$$\frac{f^{(n-1)}(b)}{f^{(n)}(b)} \text{ und } \frac{f^{(n-1)}(a)}{-f^{(n)}(a)},$$

d es findet sich, dass dieselben entweder einzeln er in Summe $\overline{\overline{>}}\ b-a$ sind, so liegen zwischen a d b imaginäre Wurzeln. Ist im Gegentheil diese mme $<b-a$, so wird man einen zwischen a und b genden Werth c in $f^{(n-1)}(x)$ substituiren und unterchen, ob $f^{(n-1)}(c)$ mit $f^{(n-1)}(a)$ und $f^{(n-1)}(b)$ einerlei er entgegengesetzte Zeichen hat. Findet letzteres tt, so sind die Wurzeln durch c getrennt, also reell; d aber die Zeichen einerlei, so muss das Verfahren in r Weise, wie in §. 146 gezeigt ist, wiederholt wern. Sey nun gefunden, dass die Wurzeln *reell* und rch c getrennt sind, so ist dadurch das Intervall b in die beiden neuen $a\ c$ und $c\ b$ zerfallen, deren les eine Wurzel von $f^{(n-1)}(x)=0$ enthält und daher ter $f^{(n-1)}$ den Index 1 hat. Es ist daher auch durch se Trennung in beiden Intervallen der erste Index jedenfalls über $f^{(n)}(x)$, unter welcher Function er her stand, nach der Rechten hinausgerückt, und das rige Verfahren kann nun für beide Indexreihen von uem beginnen. Fanden sich aber die Wurzeln der eichung $f^{(n-1)}(x)=0$ *imaginär*, so haben auch alle s den folgenden Gliedern der Functionenreihe gedete Gleichungen

$$f^{(n-2)}(x)=0,\ f^{(n-3)}(x)=0,\ \ldots.$$
$$\ldots.\ f''(x)=0,\ f'(x)=0,\ f(x)=0$$

imaginäre Wurzeln. Denn (um von dem, was berei
in den §§. 119 und 125 bewiesen ist, hier keinen G
brauch zu machen) hat $f^{(n-1)}(x)=0$ imaginäre Wu
zeln, so wird die Substitution einer reellen Wurzel
von $f^{(n)}(x)=0$, nach de Gua's Satze für $f^{(n+1)}($
und $f^{(n-1)}(\gamma)$ einerlei Zeichen geben. Dann aber wi
auch, vermöge der Regel des doppelten Zeichens, d
Functionenreihe, ganz oder bis zu einem beliebig
zwischen $f^{(n)}$ und f liegenden Gliede genommen, mi
destens zwei Zeichenwechsel verlieren, und unt
diesen Umständen hierdurch nicht blos für die u
sprüngliche Gleichung $f(x)=0$, sondern auch f
jede aus den abgeleiteten Functionen, welche n
driger sind als $f^{(n)}(x)$, gebildete Gleichung e
Paar imaginärer Wurzeln angezeigt seyn.

Hiernach wird in jedem der den Functionen

$$f^{(n)}, f^{(n-1)}, \ldots f'', f', f$$

beziehungsweise zugehörigen Indices ein Theil =
auf diese Paare von imaginären Wurzeln sich bez
hen. Bei der weitern Untersuchung braucht daher a
diesen Theil nicht weiter Rücksicht genommen
werden, und man kann demnach von $\delta^{(m-n)}=2$
die sämmtlichen Indices um 2 vermindern, und m
auf die Reste (deren erster also $=0$ ist) das bisl
rige Verfahren wieder anwenden.

§. 152.

Führen wir jetzt zur Erläuterung dieser Metho
einige Beispiele durch. Nehmen wir zuerst das B
spiel §. 139, 2 noch einmal vor, in welchem sich z
schen 1 und 10 drei Wurzeln ergaben. Wir hab
zwar in §. 143 eine von diesen gesondert und in §. 1
die Regel für die imaginären Wurzeln auf die beid
übrigen angewandt, allein, wie schon am erste
Orte bemerkt wurde: dass die Trennung durch
Substitution einer ganzen Zahl gelang, konnte b

s ein glücklicher Zufall betrachtet werden; diese
ıbstitution willkürlicher Werthe führt also nicht si-
ıer zum Ziele, was dagegen die in den vorherge-
ınden §§. auseinandergesetzte Methode immer leistet.

Die Gleichung war also

1) $f(x)=x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101=0,$

ıd

	f^{V},	f^{IV},	f''',	f'',	f',	f
ır (1)	+	+	−	+	+	−
(10)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{2}{+}$	$\overset{2}{+}$	$\overset{3}{+}$

so $\delta^{(5)}=3$. Dem ersten Index $=1$ steht zur Rech-
ı 2, zur Linken 0, die Folge der Indices ist also
1 2 und also die Regel zur Unterscheidung der ima-
ıären Wurzeln anwendbar. Es ist aber

$'(1)=30; f'''(1)=156; f''(10)=15150; f'''(10)=5136;$

so
$$\frac{30}{156}+\frac{15150}{5136}<10-1<9;$$

bleibt also für jetzt die Natur der Wurzeln unent-
hieden. Man wird nun weiter untersuchen müssen,
$f''(x)$ und $f'''(x)$ etwa einen gemeinsamen Factor
ıben, von dem, wenn er $=0$ gesetzt wird, eine Wur-
l zwischen 1 und 10 liege. Es findet sich ein sol-
ıer nicht. Man substituire daher eine Zahl zwischen
und 10 in der Functionenreihe, also, was am ein-
chsten, 2, so wird

(1)	+	+	−	+	+	−
(2)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{-}$	$\overset{1}{-}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{-}$
(10)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{2}{+}$	$\overset{3}{+}$

s liegen also alle 3 Wurzeln zwischen 2 und 10; und
ı in diesem Intervall der erste Index 1 zur Rechten
zur Linken aber nicht 0, sondern 1 hat, so ist von
euem zu substituiren. Es ergiebt sich

(2)	+	+	−	−	+	−
(3)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{0}{-}$	$\overset{1}{-}$	$\overset{2}{-}$
(10)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{1}{+}$

Es liegt also eine reelle Wurzel zwischen 3 und
und zwei Wurzeln zwischen 2 und 3. Die Folge d
Indices ist 0 1 2, erlaubt also die Anwendung der
erwähnten Regel. Dies ist bereits im §. 147 gesch-
hen und bedarf also keiner nochmaligen Wiederholun

2) Im §. 139, 4 war

$$f(x)=x^4-4x^3-3x+23=0,$$

und

	f^{IV},	f''',	f'',	f',	f
für (>1)	+	+	−	−	+
(10)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{2}{+}$

Der erste Index 1 hat also zur Linken 1 und es mu
also 2 substituirt werden, woraus man erhält

(2)	+	+	0	−	+

daher nach der Regel vom doppelten Zeichen

(>1)	+	+	−	−	+
(<2)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{-}$	$\overset{0}{-}$	$\overset{0}{+}$
(>2)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{0}{-}$	$\overset{0}{+}$
(10)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{2}{+}$

Die beiden Wurzeln liegen also nun zwischen 2 u
10 und unsre Regel ist wegen der Folge 0 1 2 a
wendbar. Sie giebt

$$\frac{5993}{2797}+\frac{1}{19}<10-2<8.$$

Die Beschaffenheit der Wurzeln bleibt also unentsch
den. Jetzt fragt es sich zunächst, ob die Gleichu
gleiche Wurzeln hat. Aber sie hat keine, da f
und $f'(x)$ keinen gemeinschaftlichen Factor hab
Wir substituiren daher 3. Dann erhält man

(>2)	+	+	+	−	+
(3)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{-}$	$\overset{1}{-}$
(10)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{1}{+}$

und die Wurzeln sind getrennt, folglich reell.

3) Im §. 139, 5 war

$$f(x) = x^6 - 3x^3 + 7x^2 - 15x - 8 = 0,$$

nd

	f^{VI}	f^{V}	f^{IV}	f'''	f''	f'	f
für (>0)	+	+	+	−	+	−	−
(1)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{2}{+}$	$\overset{2}{-}$	$\overset{2}{-}$

ier ist sogleich auf die Functionen f^{IV}, f''', f'' die
itscheidende Regel anwendbar; sie giebt

$$\frac{26}{102} + \frac{14}{18} > 1 - 0 > 1.$$

ie Wurzeln der Gleichung $f''(x) = 0$ und damit auch
e der Gleichung $f(x) = 0$, welche zwischen 0 und 1
gen, sind also imaginär.

4) Im §. 141, 1 war

$$f(x) = x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0,$$

id

	f^{VII}	f^{VI}	f^{V}	f^{IV}	f'''	f''	f'	f
r (>0)	+	+	−	−	−	+	−	+
(1)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{1}{-}$	$\overset{2}{-}$	$\overset{2}{+}$
(10)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{2}{+}$

eide Intervalle müssen, da die Folge der Indices
i der ersten Eins 1 1 2 ist, in engere zerlegt werden.
nen gemeinschaftlichen Theiler haben $f(x)$ und $f'(x)$
cht. Beschäftigen wir uns nun zuerst mit dem
tervall zwischen 0 und 1, so ergiebt sich nach Sub-
itution von $\frac{1}{2}$

(>0)	+	+	−	−	−	+	−	+
($\frac{1}{2}$)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{0}{-}$	$\overset{0}{-}$	$\overset{1}{-}$	$\overset{2}{-}$	$\overset{2}{+}$
(1)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{0}{-}$	$\overset{0}{-}$	$\overset{0}{+}$

ie Anwendung der Unterscheidungsregel auf das erste
eser Intervalle giebt

$$\frac{241}{300} + \frac{5}{8} > \frac{1}{2} - 0 > \frac{1}{2};$$

e beiden darin enthaltenen Wurzeln sind also ima-
näre. Im Intervall $\frac{1}{2}\ldots1$ liegen offenbar keine Wurzeln.

Schalten wir im zweiten Intervall zwischen 1 un
10, 2 ein, so kommt

(1)	+	+	+	+	+	—	—	+
	0	0	0	0	0	1	1	2
(2)	+	+	+	+	+	+	+	+

Es muss also abermals das Intervall zwischen 1 und
zerlegt werden. Dies geschehe durch $\frac{3}{2}$, so findet si

(1)	+	+	+	+	+	—	—	+
	0	0	0	0	0	1	1	1
($\frac{3}{2}$)	+	+	+	+	+	+	+	—
	0	0	0	0	0	0	0	1
(2)	+	+	+	+	+	+	+	+

Die Wurzeln sind also getrennt, mithin reelle.

§. 153.

Wir können nunmehr — was wegen der prak-
schen Brauchbarkeit dieser Untersuchungen besond
nützlich scheint — die sämmtlichen Ergebnisse dies
Abschnitts in eine einzige Regel vereinigen, der
Ausdruck folgender seyn wird.

1) Ist eine Gleichung $f(x)=0$ vorgelegt, für d
ren einzelne Wurzeln Grenzen angegeben werden s
len, so bilde man die sämmtlichen abgeleiteten Fu
ctionen $f'(x)$, $f''(x) \ldots f^{(m)}(x)$ und schreibe sie, v
der höchsten anfangend, in die Reihe

$$f^{(m)}(x),\ f^{(m-1)}(x),\ \ldots.\ f''(x),\ f'(x),\ f(x$$

substituire in derselben die positiven und negativ
ganzen Decimalzahlen

$$0,\quad 1,\quad 10,\quad 100, \ldots\ldots$$
$$-1,\ -10,\ -100, \ldots\ldots$$

bis einerseits hierdurch blos positive, andrerseits R
sultate mit regelmässig abwechselnden Zeichen erh
ten werden. Finde jenes für $x=l$, dieses für $x=-g$
statt, so sind nun zwischen diesen Werthen die sämt
lichen Wurzeln der Gleichung zu suchen.

2) Man zähle sodann für jede der Substitution
die Zeichenwechsel der Functionenreihe und beme
die Differenz dieser Anzahl mit der Anzahl der Zi

henwechsel, welche die Substitution der nächsten Decimalzahlen gegeben hat, durch zwischengesetzte Indices.

3) Ist der höchste Index für zwei substituirte Werthe a und b, 0, so liegt zwischen ihnen keine Wurzel; ist er 1, so liegt dazwischen Eine reelle Wurzel; ist er $\overline{\overline{>}}$ 2, so sind eben so viele Wurzeln dazwischen zu suchen, unter denen jedoch paarweise imaginäre vorkommen können.

4) Macht die Substitution irgend eines Werthes ein oder mehrere Glieder der Functionenreihe $=0$, so lassen sich durch die Regel vom doppelten Zeichen (§. 138) die Zeichenwechsel der Reihen bestimmen, welche durch Substitution der nächstvorhergehenden und folgenden Werthe erhalten werden. Auch ergiebt sich dabei, ob und wie viel imaginäre Wurzeln die Gleichung bei dem substituirten Werthe hat.

5) Ist der höchste Index $\overline{\overline{>}}$ 2, so durchläuft man die Reihe der Indices von der Rechten zur Linken und bleibt bei dem ersten stehen, der $=1$ ist. Diesem zur Rechten steht immer 2, zur Linken 0 oder eine andere Zahl. Im letztern Falle substituire man eine zwischen a und b liegende Zahl c und zerlege hierdurch das Intervall $a\,b$ in die engeren Intervalle $a\,c$, $c\,b$. Hierdurch bilden sich zwei neue Indexreihen, in denen aber immer die erste 1 weiter zur Rechten steht als in der vorigen. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens wird entweder der höchste Index in einem dieser allmälig erhaltenen Intervalle endlich 1 oder man erhält am Ende oder in der Mitte die Folge der Indices 0 1 2.

6) Findet diese Folge 0 1 2 statt, und gehören diese Indices beziehlich zu den Functionen $f^{(n+1)}(x)$, $f^{(n)}(x)$, $f^{(n-1)}(x)$, so bildet man die Quotienten

$$\frac{f^{(n-1)}(b)}{f^{(n)}(b)} \text{ und } \frac{f^{(n-1)}(a)}{-f^{(n)}(a)}$$

und untersucht, ob sie einzeln oder in Summe $\geq b-$
sind oder nicht. Das erstere Verhältniss ist das Kenn
zeichen imaginärer Wurzeln der Gleichung $f^{(n-1)}(x)=$
zwischen a und b. Ist aber jene Summe $< b-a$, s
kann die Gleichung auch gleiche oder ungleiche reell
Wurzeln haben.

Hat $f^{(n-1)}(x)=0$ imaginäre Wurzeln, so hat auc
$f(x)=0$ und jede aus den zwischenliegenden Functio
nen gebildete Gleichung deren eben so viel. Man ver
mindere daher die Indices aller dieser Functionen u
2 und untersuche die Reste von Neuem nach den bis
herigen Regeln.

7) Giebt die Untersuchung der vorstehenden Num
mer die genannte Summe $< b-a$, so ist zuerst durc
Aufsuchung des gemeinschaftlichen Factors von $f^{(n-1)}(x$
und $f^{(n)}(x)$ zu prüfen, ob die Gleichung $f^{(n-1)}(x)=$
gleiche Wurzeln hat, und ob diese zwischen a und
liegen. Finden sich solche Wurzeln, so substituir
man sie in die vorhergehenden Functionen $f^{(n-2)}(x$
$f^{(n-3)}(x) \ldots f'(x), f(x)$. Verschwinden auch diese
so hat auch $f(x)$ zwischen a und b gleiche Wurzeln
deren Zahl sich leicht bestimmt. Verschwinden si
nicht, so sind durch die beiden gleichen Wurzeln vo
$f^{(n-1)}(x)=0$, die also diese Function sowohl als auc
$f^{(n)}(x)$ null machen, nach De Gua's Satze, für $f(x)=$
imaginäre Wurzeln angezeigt, daher man auch, wi
bei diesen, die Reihe der Indices von $f^{(n-1)}$ bis z
Ende um 2 vermindert und mit den Resten wie vorhe
verfährt. Giebt endlich die Untersuchung für $f^{(n-1)}(x)=$
keine gleichen Wurzeln, so sind sie ungleich und las
sen sich entweder trennen oder es lässt sich ein In
tervall bilden, auf welches die Regel in 6) anwend
bar ist.

Auf diese Weise wird man zuletzt nur Intervall
haben, in denen entweder gewiss imaginäre Wurzel

egen oder deren höchster Index 0 oder 1 ist und
aher keine oder eine reelle Wurzel anzeigt.

§. 154.

Da in den bereits mitgetheilten Beispielen mehre der in Vorstehendem bezeichneten Fälle noch cht vorgekommen sind, so behandeln wir noch vollständig vier neue, von denen die beiden mittlern aus ourier's Werke entlehnt sind.

1) Sey

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120 = 0,$$

lso

$$f'(x) = 5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x - 63$$

$$f''(x) = 20x^3 - 24x^2 - 60x + 60$$

$$f'''(x) = 60x^2 - 48x - 60$$

$$f^{\text{IV}}(x) = 120x - 48$$

$$f^{\text{V}}(x) = 120,$$

o wird

	f^{V},	f^{IV},	f''',	f'',	f',	f
für (—10)	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
(—1)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{-}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{1}{-}$	$\overset{2}{-}$
(0)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{-}$	$\overset{1}{-}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{6}{-}$
(1)	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{0}{-}$	$\overset{1}{-}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{-}$
(10)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{2}{+}$	$\overset{3}{+}$

Es liegen also 2 von den 5 Wurzeln der Gleichung wischen —1 und —10 und 3 zwischen 1 und 10. Da in erterem Intervall der ersten 1 zur Linken nicht 0 steht, so ubstituiren wir in der Functionenreihe $x = -2$. Dies giebt

(—10)	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
(—2)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{-}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{-}$	$\overset{1}{-}$	$\overset{2}{-}$
(—1)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{-}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{0}{-}$	$\overset{0}{-}$

Venden wir jetzt auf das erste Intervall die Regel es §. 146 an, so kommt

$$\frac{110}{33} + \frac{107750}{54463} < 9;$$

es bleibt also noch unentschieden, ob die beiden Wu
zeln reell oder imaginär sind. Ein gemeinschaftlich
Factor von $f(x)$ und $f'(x)$ findet sich nicht. Subst
tuiren wir daher —3, so erhalten wir

$$\begin{array}{lcccccc}
(-10) & + & - & + & - & + & - \\
(-3) & \overset{0}{+} & \overset{0}{-} & \overset{0}{+} & \overset{0}{-} & \overset{0}{+} & \overset{1}{+} \\
(-2) & \overset{0}{+} & \overset{0}{-} & \overset{0}{+} & \overset{0}{-} & \overset{1}{-} & \overset{1}{-}
\end{array}$$

es liegt also eine reelle Wurzel in dem ersteren, ei
zweite reelle Wurzel in dem andern Intervall.

Gehen wir jetzt in das noch zu untersuchende I
tervall zwischen 1 und 10 und substituiren 2, so e
giebt sich

$$\begin{array}{lcccccc}
(2) & + & + & + & + & + & +
\end{array}$$

die 3 Wurzeln liegen also zwischen 1 und 2. W
substituiren demnach $x = \frac{3}{2}$ und erhalten

$$\begin{array}{lcccccc}
(\frac{3}{2}) & + & + & + & - & + & -
\end{array}$$

Dies giebt mit (1) verglichen die Indices

$$0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0$$

also sind zwischen 1 und $\frac{3}{2}$ keine Wurzeln; dageg
sind mit (2) verglichen die Indices

$$0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 3.$$

Jetzt wird die Anwendung der Unterscheidungsreg
möglich; daraus folgt

$$\frac{447}{88} + \frac{79}{4} > \frac{1}{2},$$

also hat die Gleichung $f'(x) = 0$ zwei imaginäre Wu
zeln und damit auch die ursprüngliche $f(x) = 0$. Ve
mindern wir nun die Indices von dem zu $f'(x)$ geh
rigen an um zwei Einheiten, so wird die Folge derselb

$$0\ 1,$$

woraus erhellt, dass ausser den 2 imaginären Wu
zeln noch eine reelle zwischen denselben Grenzen lie
was sich übrigens von selbst versteht. Von den fü
Wurzeln der vorgelegten Gleichung liegt also ei
reelle zwischen —10 und —3, eine zweite reelle zw
schen —3 und —2, eine dritte reelle zwischen $\frac{3}{2}$ und 2

nd zwischen denselben Grenzen $\frac{3}{2}$ und 2 ein Paar naginärer Wurzeln.

2) Sey

$$f(x)=x^5+x^4+x^3-2x^2+2x-1=0,$$

lso

$$f'(x)=5x^4+4x^3+3x^2-4x+2$$
$$f''(x)=20x^3+12x^2+6x-4$$
$$f'''(x)=60x^2+24x+6$$
$$f^{\text{IV}}(x)=120x+24$$
$$f^{\text{V}}(x)=120,$$

wird

	f^{V},	f^{IV},	f''',	f'',	f',	f
für (−1)	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
(0)	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{2}{+}$	$\overset{2}{-}$	$\overset{2}{+}$	$\overset{2}{-}$
(1)	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{2}{+}$	$\overset{3}{+}$

wei Wurzeln sind also zunächst zwischen −1 und 0 u suchen. Durch Anwendung der Regel §. 146 eralten wir

$$\frac{42}{96}+\frac{6}{24}<1.$$

ie Natur der Wurzeln bleibt also noch unentschieden. Vir untersuchen, ob $f'''(x)$ und $f''(x)$ einen gemeinchaftlichen Factor haben. Da sich keiner vorfindet, o substituiren wir $-\frac{1}{2}$. Dies giebt

$(-\frac{1}{2})$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
(0)	$\overset{0}{+}$	$\overset{1}{+}$	$\overset{2}{+}$	$\overset{2}{-}$	$\overset{2}{+}$	$\overset{2}{-}$

ie beiden Wurzeln liegen also zwischen $-\frac{1}{2}$ und 0. Insre Regel lässt sich abermals anwenden. Nach ar wird

$$\frac{9}{36}+\frac{6}{24}=\frac{1}{2},$$

voraus erhellt, dass die Wurzeln der Gleichung $'''(x)=0$ und damit auch der ursprünglichen $f(x)=0$ wischen 0 und $-\frac{1}{2}$ imaginär sind.

Dieselbe Regel wenden wir ferner auf das Inte
vall zwischen 0 und 1 an. Sie giebt

$$\frac{2}{4} + \frac{10}{36} < 1,$$

lässt also die Beschaffenheit der Wurzeln unentschi
den. Da auch die Functionen $f'(x)$ und $f''(x)$ keine
gemeinschaftlichen Factor haben, so substituiren w
$\frac{1}{2}$. Es kommt

(0)	+	+	+	—	+	—
	0	0	0	1	2	2
($\frac{1}{2}$)	+	+	+	+	+	—
	0	0	0	0	0	1
(1)	+	+	+	+	+	+

wodurch eine reelle Wurzel zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 eing
schlossen ist, also nur noch die im Intervall 0...
enthaltenen zu untersuchen sind. Die Anwendung d
oft erwähnten Regel giebt

$$\frac{2}{4} + \frac{25}{72} > \frac{1}{2};$$

die Wurzeln der Gleichung $f'(x)=0$ und damit au
der ursprünglichen $f(x)=0$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ sind al
imaginär. Demnach hat unsere Gleichung ein Pa
imaginärer Wurzeln zwischen 0 und $-\frac{1}{2}$, ein zweit
Paar zwischen 0 und $+\frac{1}{2}$ und eine reelle Wurzel zw
schen $\frac{1}{2}$ und 1.

3) Sey

$$f(x)=x^6-12x^5+60x^4+123x^2+4567x-89012=$$

also

$$f'(x)=6x^5-60x^4+240x^3+246x+4567$$
$$f''(x)=30x^4-240x^3+720x^2+246$$
$$f'''(x)=120x^3-720x^2+1440x$$
$$f^{IV}(x)=360x^2-1440x+1440$$
$$f^{V}(x)=720x-1440$$
$$f^{VI}(x)=720;$$

so wird

	f^{VI},	f^{V},	f^{IV},	f''',	f'',	f',	f
für (—10)	+	—	+	—	+	—	+
	0	0	0	0	0	0	1
(—1)	+	—	+	—	+	—	—
	0	0	0	0	0	1	0
(<0)	+	—	+	—	+	+	—
(0)	+ }0	— }0	+ }0	0 }1	+ }2	+ }2	— }2
(>0)	+	—	+	+	+	+	—
	0	0	0	0	0	0	0
(1)	+	—	+	+	+	+	—
	0	1	2	2	2	2	3
(10)	+	+	+	+	+	+	+

er liegt also offenbar zwischen —10 und —1 eine
elle, bei 0 ein Paar imaginärer Wurzeln. Nur das
tervall 1..10 bleibt also zu untersuchen übrig. Die
egel zur Unterscheidung der Wurzeln giebt

$$\frac{360}{720} + \frac{23040}{5760} < 9;$$

bleibt also die Beschaffenheit der Wurzeln unent-
hieden. Wir untersuchen demnach, ob $f^{IV}(x)$ und
(x) einen gemeinschaftlichen Factor haben. Ein
lcher findet sich in der That, nämlich $\frac{1}{2}x-1$. Die-
r Factor wird null für $x=2$, also für einen zwi-
hen 1 und 10 liegenden Werth. Die Gleichung
$^{V}(x)=0$ hat also zwei gleiche Wurzeln im Intervall
..10. Durch Substitution dieses Werthes 2 ver-
hwinden jedoch die übrigen vorhergehenden Functio-
n nicht; demnach hat $f(x)=0$ nicht zwei gleiche
elle, sondern zwei imaginäre Wurzeln im Intervall
..10. Vermindern wir nun die Indices von dem zu
^{V} gehörigen an durchgehends um 2, so entsteht die
lge 0 0 0 0 1,
e in demselben Intervall noch eine reelle Wurzel
giebt, wie es vorauszusehen war. Also hat die vor-
legte Gleichung Eine reelle Wurzel zwischen —10
d —1, eine zweite reelle zwischen 1 und 10; ein
ar imaginärer bei 0, ein zweites Paar zwischen 1
d 10.

4) Sey

$$f(x)=x^4-2x^2+3x+10=0\ ^{*)},$$

also

$$f'(x)=4x^3-4x+3$$
$$f''(x)=12x^2-4$$
$$f'''(x)=24x$$
$$f^{IV}(x)=24;$$

so wird

	f^{IV},	f''',	f'',	f',	f
für (—10)	+	—	+	—	+
	0	0	0	1	2
(—1)	+	—	+	+	+
	0	0	1	0	0
(<0)	+	—	—	+	+
(0)	+ } 0	0 } 1	— } 0	+ } 0	+ } 0
(>0)	+	+	—	+	+
	0	0	1	2	2
(1)	+	+	+	+	+

Es liegen also 2 Wurzeln zwischen —10 und —1 u
2 andre zwischen 0 und 1. Untersuchen wir zue
das Intervall —10...—1, so ergiebt die Untersch
dungsregel

$$\frac{6}{3}+\frac{9840}{3957}<9;$$

sie lässt also Ungewissheit über die Natur der W
zeln. Da $f(x)$ und $f'(x)$ keinen gemeinschaftlich
Theiler haben, so ziehen wir das Intervall durch S
stitution von —2 zusammen, woraus sich ergiebt

(—2)	+	—	+	—	+
	0	0	0	1	2
(—1)	+	—	+	+	+

Die Unterscheidungsregel, von Neuem in Anwendu
gebracht, giebt

$$\frac{6}{3}+\frac{12}{21}>1;$$

---

*) Vgl. §. 78 a. E.

tzt also zeigen sich die im Intervall $-2\ldots-1$ enthaltenen Wurzeln als imaginäre.

Wenden wir uns zu dem andern Intervall $0\ldots1$, giebt die Regel, auf die Functionen f', f'', f''', Anwendung gebracht,

$$\frac{3}{8}+\frac{3}{4}>1;$$

so hat in diesem Intervall die Gleichung $f'(x)=0$, lglich auch $f(x)=0$ ein Paar imaginäre Wurzeln.

Die vier Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind mnach sämmtlich imaginär, und es liegt das eine aar derselben zwischen -10 und -1, das andre vischen 0 und 1.

Neunter Abschnitt.

Von der Berechnung der Wurzeln aus ihren Grenzen.

---

§. 155.

Wenn eine Wurzel durch Grenzen von all
andern Wurzeln derselben Gleichung abgesondert is
so kann man sich die Aufgabe stellen, aus dies
Grenzen die Wurzel selbst entweder vollständig ode
wenn dies unmöglich, annäherungsweise zu berechne.
Eine Auflösung dieser Aufgabe von sehr einfacher A
gab zuerst Newton*). Da dieselbe sich aber nic
als in allen Fällen ausreichend erwies, so führte L
grange**) eine, wie es schien, vorzüglichere, auf d
Eigenschaften der Kettenbrüche gegründete ein. I
dess hat neuerdings Fourier***) gezeigt, dass Newton
Methode einer Vervollkommnung fähig ist, die nich
zu wünschen übrig lässt, und die mit den im vorh
gehenden Abschnitt vorgetragenen Lehren in genaue
Zusammenhange steht. Sie wird hierdurch wieder i
ihre ursprünglichen Rechte als einfachste und nat

---

*) S. dessen *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, im A
schnitt *de reductione affectarum aequationum.* — Newtoni *Opusc*
ed. Castil. T. I. p. 37.

**) *De la résolut. des équations numériques Chap. III.*

***) *Analyse des équat. déterminées. Livre II.*

hste Methode eingesetzt, ohne dass deshalb die von agrange in Vergessenheit zu bringen wäre, nur dass e nach Fourier's *) Untersuchungen als besonderer all einer ganzen Classe von Entwickelungsarten erheint. Ohne auf die frühere unvollkommene Form n Newton's Methode Rücksicht zu nehmen, werden r sie in den nachfolgenden §§. sogleich mit den gänzungen und Verbesserungen darstellen, welche e durch Fourier erhalten hat.

§. 156.

Sey durch die Grenzen a und b die reelle Wurl α der Gleichung $f(x)=0$ von den etwaigen übrigen gesondert, und zwar so, dass die drei letzten Indices 0 1 seyen, was bei ungleichen reellen Wurzeln (von n gleichen nachher) nach §. 149 durch Zusammenehung der Grenzen immer möglich ist. Die Zeichen r drei letzten Glieder der Functionenreihe werden nn immer eine von folgenden vier Verbindungen lden:

		f''	f'	f
1)	(a)	+	+	−
	(b)	+	+	+
2)	(a)	+	−	+
	(b)	+	−	−
3)	(a)	−	+	−
	(b)	−	+	+
4)	(a)	−	−	+
	(b)	−	−	−

allen also wird die ursprüngliche Function $f(x)$ für e beiden Grenzwerthe entgegengesetzte, dagegen die ste sowohl als die zweite abgeleitete Function einer Zeichen haben. Gehen wir nun zuerst von der ern Grenze b der Wurzel α aus und nehmen die estimmungen des ersten der vorstehenden 4 Schemata an, so wird, wenn wir $b-\alpha=\zeta$ setzen,

*) a. a. O. *Exposé synoptique p.* 39.

$$f(b-\zeta) = 0,$$

oder entwickelt, mit Beziehung auf §. 42,

$$f(b) - \zeta f'(b-\zeta \ldots b) = 0,$$

also $$\zeta = \frac{f(b)}{f'(\alpha \ldots b)},$$

demnach $$\alpha = b - \frac{f(b)}{f'(\alpha \ldots b)};$$

oder, da eine zwischen α und b liegende Grösse au
offenbar zwischen a und b liegt,

$$\alpha = b - \frac{f(b)}{f'(a \ldots b)}.$$

Setzen wir $f'(b)$ statt $f'(a \ldots b)$, so setzen wir etws
Grösseres an die Stelle des Kleineren: denn da $f''()$
den Index 0, also $f''(x) = 0$ zwischen a und b kei
Wurzel hat, so ist erstere Function zwischen beid
Grenzen immer positiv; dasselbe gilt aus gleich
Gründen von $f'(x)$. Da aber $dx f''(x)$ das Increm
von $f'(x)$ ausdrückt, so ist klar, dass wegen r
durchgängig positiven Beschaffenheit von $f''(x)$ zi-
schen a und b, $f'(x)$ immer *wächst.* Demnach st
also $f'(a \ldots b) < f'(b)$. Setzen wir daher

$$b - \frac{f(b)}{f'(b)} = b',$$

so ist offenbar $b' > \alpha$, aber, da $f(b)$ und $f'(b)$ ein-
lei Zeichen haben, zugleich $b' < b$; es liegt als b'
der Wurzel α *näher* als ihr b lag, und man hat a
damit einen *genäherten Werth* gefunden.

Gehen wir zweitens von der unteren Grenze a
aus, so sey $\alpha - a = \varepsilon$; dann wird

$$f(a+\varepsilon) = 0,$$

d. i. $$f(a) + \varepsilon f'(a \ldots a+\varepsilon) = 0,$$

also $$\varepsilon = -\frac{f(a)}{f'(a \ldots \alpha)};$$

demnach $$\alpha = a - \frac{f(a)}{f'(a \ldots \alpha)};$$

ler auch, auf gleiche Weise wie oben,

$$\alpha = a - \frac{f(a)}{f'(a \ldots b)}.$$

Da, nach dem zum Grunde gelegten Schema der :eichen, $f(a)$ und $f'(a \ldots b)$ entgegengesetzte Zeichen |.ben, also der Quotient aus beiden negativ ist, so ›rden wir noch besser schreiben

$$\alpha = a + \frac{-f(a)}{f'(a \ldots b)}.$$

ertauschen wir auch hier wieder $f'(a \ldots b)$ mit $f'(b)$ ıd setzen

$$a + \frac{-f(a)}{f'(b)} = a',$$

ist $a' < \alpha$; offenbar aber auch $a' > a$; es liegt ;so a' der Wurzel α näher als a und man hat damit ıen genäherten Werth von α gefunden, der aber leiner als der wahre ist, indess der, zu dem man ıttels der Grenze b gelangte, grösser als die wahre 'urzel war. Es erhellt übrigens nun von selbst, dass ıd wie die beiden Werthe a', b' benutzt werden kön-ın, um ein drittes Paar die Wurzel noch enger ein-:hliessender Grössen zu erhalten, u. s. f.

§. 157.

Hätten wir in der zweiten der beiden vorstehen-n Entwickelungen $f'(a \ldots b)$ mit $f'(a)$ vertauscht, wie eigentlich die Analogie mit der ersten zunächst die Hand gab, so wäre $a' > \alpha$ gekommen, und auch $a' > a$, so blieb es unentschieden, ob dieser 'erth a' der gesuchten Wurzel α auch wirklich nä-r lag als a, oder ob er sich nicht im Gegentheil wei-r von ihr entfernte. Dieselbe Unentschiedenheit ırde erfolgen, wenn wir in der ersten Entwickelung $= b - \frac{f(b)}{f'(a)}$ berechnen wollten, indem diese Be-mmung auf $b' < \alpha$ führen würde.

Legen wir das zweite der vier angeführten Ze chenschemata zum Grunde, und nehmen also für di drei letzten Functionen an, dass

$$\begin{array}{cccc} & f'' & f' & f \\ (a) & + & - & + \\ & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} \\ (b) & + & - & -, \end{array}$$

so ist klar, dass der absolute Werth von $f'(x)$ von bis b fortwährend sich vermindert, also absolut genon men $f'(a \ldots b) > f'(b)$, aber $< f'(a)$ ist. Demnac und weil $f(b)$ und $f'(b)$ einerlei Zeichen haben, würd die Anwendung der ersten Berechnung des vorherg. hier nicht zu einem der Wurzel entschieden näher als liegenden Werthe b' führen. Setzen wir dagegen

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)},$$

so wird *dieses* $b' < b$ und $> \alpha$, also ein wahrer N herungswerth seyn. Eben so würde auf der ande Seite die Bestimmung von a' im vorigen §. zu kein bestimmten Annäherung führen; setzen wir aber

$$a' = a + \frac{f(a)}{-f'(a)},$$

so ist $a' > a$ und $< \alpha$, also ein wahrer Näherung werth.

Wir wenden uns zum dritten Schema

$$\begin{array}{cccc} & f'' & f' & f \\ (a) & - & + & - \\ & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} \\ (b) & - & + & + \end{array}$$

Hier nimmt $f'(x)$ von a bis b ununterbrochen ab. s ist also $f'(a) > f'(a \ldots b) > f'(b)$, und daher leic zu übersehen, dass nur, wenn

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)},$$

$b' < b$ und $> \alpha$; und ebenso andrerseits, dass n wenn

$$a' = a + \frac{-f(a)}{f'(a)},$$

$a' > a$ und $< \alpha$ ist.

Was endlich das vierte und letzte Schema

$$\begin{array}{cccc} & f'' & f' & f \\ (a) & - & - & + \\ (b) & \overset{0}{-} & \overset{0}{-} & \overset{1}{-} \end{array}$$

trifft, so nimmt hier der absolute Werth von $f'(x)$ n a bis b fortwährend zu; also ist, absolut genomen, $f'(a) < f'(a \ldots b) < f'(b)$, und daher, für

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)},$$

$< b$ und $> a$; desgleichen für

$$a' = a + \frac{f(a)}{-f'(b)},$$

$> a$ und $< a$.

Fassen wir diese Resultate zusammen, so zeigen ch also sowohl für b' als a' zwei Arten der Berechng, indem

entweder

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \text{ und } a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)};$$

oder

$$b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)} \text{ und } a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

e erste führt zu wahren Näherungswerthen im eren und vierten Schema, die zweite im zweiten und itten. Dies Resultat kann noch einfacher ausgeückt werden. Es ist nämlich offenbar immer nur thig zu wissen, bei welcher Grenze diejenige Form r Rechnung anzuwenden ist, bei der in *beiden* darin rkommenden Functionen f und f' derselbe Grenzrth a oder b gesetzt werden muss. Dann gehört e andre Form der Rechnung, in welcher die Funonen f und f' sich auf verschiedene Werthe bezien, immer der andern Grenze. Die Vergleichung r Schemata zeigt nun, *dass die erstere (einfachere) erechnungsart des Näherungswerthes immer dernigen Grenze zukommt, bei welcher die Functio-*

nen f *und* f″ *einerlei Zeichen haben.* Wir werde in einem der nächsten Paragraphen für diese Grenz noch einen geometrischen Ausdruck finden.

§. 158.

Nicht unbemerkt mag hierbei bleiben, dass d bekannten Regeln der gemeinen Wurzelausziehunge den besondern Fall dieser Näherungsrechnung bilde Diese nämlich beziehen sich auf die Auflösung d Gleichung

$$f(x) = x^m - A = 0,$$

für welche, wenn a die der Wurzel nächste kleine ganze Zahl ist, folgendes Schema gilt:

	f''	f'	f
(a)	+	+	−
$(a+1)$	+	+	+

Nach dem Vorstehenden müsste daher die Rec- nung von der obern Grenze der Wurzel, $a+1$, anfa- gen, und es würde

$$a' = (a+1) - \frac{f(a+1)}{f'(a+1)}$$

der erste genäherte Werth seyn. Um aber dies Subtrahiren in ein Addiren zu verwandeln, begin man die Rechnung von der untern Grenze, so dass

$$a' = a + \frac{-f(a)}{f'(a)},$$

$$= a + \frac{A - a^m}{ma^{m-1}},$$

welche Formel der allgemeine Ausdruck der bekan- ten Regeln ist. Da aber dieser Werth, wie zu A- fange dieses §. bemerkt, zugleich grösser als die g- suchte Wurzel und als a und daher kein sichrer N- herungswerth ist, so vermindert man ihn dadurch, da man bei der Division mit ma^{m-1} in $A - a^m$ den Qu- tienten nur so gross nimmt, dass bei der Wiederh- lung der Formel, wobei

$$a'' = a' + \frac{A - a'^m}{ma'^{m-1}},$$

$A - a'^m$ immer noch positiv bleibt, wodurch man versichert ist, dass a', welches nun also $< a + \frac{A-a^m}{ma^{m-1}}$, kleiner als die wahre Wurzel ist. Dies macht, wie bekannt, oft Versuche nöthig, zumal bei den cubischen und höhern Wurzeln. Nach dem vorigen §. würde man sich diese ersparen, wenn man sich der Formel

$$a' = a + \frac{A - a^m}{m(a+1)^{m-1}},$$

bediente und also nicht mit der m-fachen $(m-1)$ten Potenz des gefundenen Näherungswerthes, sondern mit derjenigen des um eine Einheit (*in der letzten Stelle*) vermehrten in $A - a^m$ dividirte. Es würde aber dabei an Bequemlichkeit der Rechnung weit mehr verloren gehen als gewonnen würde, indem man nicht gleich der Reihe nach die einzelnen Ziffern der Wurzel richtig erhielte, sondern diese erst durch die hinzugefügten späteren Stellen ergänzt würden. Wäre z. B. die Quadratwurzel aus 3 zu ziehen, so wäre in den obigen allgemeinen Ausdrücken $A = 3$, $m = 2$, $a = 1$. Daher käme zuerst

$$a' = 1 + \frac{2}{4} = 1,5.$$

Hieraus

$$a'' = 1,5 + \frac{0,75}{3,20} = 1,5 + 0,23 = 1,73.$$

Jetzt also erst wäre die zweite Ziffer der Wurzel berichtigt. Indess ist nicht zu übersehen, dass, je genauer a schon bekannt ist, um so weniger die beiden Ausdrücke

$$\frac{A - a^m}{ma^{m-1}} \text{ und } \frac{A - a^m}{mb^{m-1}},$$

wo b um eine Einheit in der letzten Stelle grösser als a seyn soll, noch von einander differiren.

§. 159.

Bevor wir zur geometrischen Erläuterung dieser analytischen Operationen übergehen, ist noch der einzige Fall zu betrachten, in welchem es nicht möglich ist, durch beliebige Zusammenziehung der Grenzen die Folge der Indices 0 0 1 für die letzten Functionen der Reihe hervorzubringen. Es ist dies der Fall mehrerer gleicher Wurzeln, für welche also der Index von $f(x)$ nothwendig $\overline{\overline{>}}$ 2 seyn muss. In diesem Falle wird $f(x)$ und $f'(x)$ einen gemeinsamen Factor $\varphi(x)$ und (wenn der letzte Index >2) auch $f(x)$ und $f''(x)$ einen gemeinsamen Factor $\psi(x)$ haben, der zwischen den Grenzen a und b null werden muss. Es entstehen also dann die Gleichungen

$$\varphi(x)=0 \quad \text{und} \quad \psi(x)=0,$$

welche von niedrigerem Grade sind als die ursprüngliche $f(x)=0$, und auf deren Auflösung sich die der letzteren reducirt. Man wird also die annähernde Rechnung und das ihr vorausgehende Verfahren zur Trennung der Wurzeln auf *diese* Gleichungen anwenden. Wir bemerken hierbei nur noch, dass diese Gleichungen zwar immer einen Factor der Form $(x-a)$ enthalten werden, nicht aber aus ihm allein nothwendig bestehen. Denn wäre z. B.

$$f(x) = (x-\alpha)^n X,$$

so ergäbe sich

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-\alpha)^n X'+n(x-\alpha)^{n-1}X \\ &= (x-\alpha)^{n-1}[(x-\alpha)X'+nX]; \end{aligned}$$

es hat also $f'(x)$ allerdings mit $f(x)$ den gemeinsamen Factor $(x-\alpha)^{n-1}$; es kann aber auch noch irgend einen andern binomischen oder polynomischen haben, dann nämlich, wenn X und X' einen solchen besitzen. Heisst dieser P, so würde in diesem Beispiel $\varphi(x) = (x-\alpha)^{n-1}P$ seyn.

Dass aber die Voraussetzung der drei Indices
0 1 allein zu einer wirklichen Annäherung führen
ınn, ist aus dem Gange der Untersuchung leicht zu
ɔersehen. Hätte nämlich $f''(x)$ zwischen a und b
ne oder mehrere Wurzeln, also einen Index $\overline{\overline{>}}$ 1,
ı wäre diese Function bald positiv, bald negativ,
ıd es würde daher, auch wenn $f'(x)$ den Index 0
ɔhielte, im Allgemeinen unentschieden bleiben, wel-
ıer von den drei Werthen $f'(a)$, $f'(a \ldots b)$, $f'(b)$ der
rösste und welcher der kleinste sey, worauf doch
les ankommt. Diese Unentschiedenheit würde noch
eigen, wenn auch $f'(x)$ zwischen a und b eine oder
ehrere Wurzeln haben könnte. Dass endlich $f(x)$
ɔn Index 1 haben muss, leuchtet am unmittelbarsten
n, da ja ohne diese Voraussetzung die gesuchte
Vurzel α von irgend einer nächstbenachbarten β nicht
ɔstimmt getrennt wäre, und also unbekannt bliebe,
ɔ man sich der einen oder der andern annäherte,
ler keiner von beiden.

§. 160.

Alles dieses setzt nun die geometrische Darstel-
ıng in das hellste Licht. Es bedarf keiner ausführ-
chen Nachweisung, dass die Lagen der Curvenbo-
en in den vier Figuren 43 bis 46 den 4 im §. 156
ıgegebenen Zeichenschematen entsprechen. Man hat,
n dies einzusehen, nur nöthig, sich zu erinnern, dass
e Function $f(x)$ die Ordinate, die $f'(x)$ die Tan-
ente des Winkels der Berührenden mit der Abscis-
ɔnaxe darstellt, und das Vorzeichen von $f''(x)$, wenn
s $\left\{\begin{matrix}\text{gleichartig}\\\text{entgegengesetzt}\end{matrix}\right\}$ mit dem von $f(x)$, anzeigt, dass die
urve in dem x entsprechenden Puncte der Abscissen-
xe die $\left\{\begin{matrix}\text{erhabene}\\\text{hohle}\end{matrix}\right\}$ Seite zukehrt. Desgleichen folgt aus
er Reihe der Indices 0 0 1, dass weder die Gleichung
$(x)=0$ mehr als Eine, noch $f'(x)=0$ und $f''(x)=0$
gend eine Wurzel zwischen a und b haben, d. i. dass

zwischen diesen Grenzen die Curve weder mehr al Einen Durchschnitt, noch ein Maximum oder Mini mum, noch einen Wendepunct hat.

Ferner drückt, was schon in §. 146 benutzt wor den ist, $\frac{f(x)}{f'(x)}$ die Subtangente des der Abscisse x zuge hörigen Punctes aus. Daher ist $b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ die um di Subtangente verminderte Abscisse b, oder wenn, wi in Fig. 47, $OB = b$, und NB' die Berührende an N so ist

$$b - \frac{f(b)}{f'(b)} = OB'.$$

Auf der andern Seite findet sich leicht, das $\frac{-f(a)}{f'(b)}$ die absolute Länge desjenigen auf der Absci senaxe liegenden Stückes ausdrückt, welches zwische dem Endpunct A der Abscisse $OA = a$ und dem Ei schnitte einer Geraden enthalten ist, die parallel zu Berührenden an N durch den A in der Curve en sprechenden Punct M gezogen wird, d. i. in der F gur 47 ist $-\frac{f(a)}{f'(b)} = AA'$ und daher

$$a - \frac{f(a)}{f'(b)} = OA'.$$

Ohne weitere Erläuterung wird nun erhellen, dass wenn MT eine Berührende an M und NU eine Pa rallele zu ihr durch N,

$$OT = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \text{ und}$$

$$OU = b - \frac{f(b)}{f'(a)} \text{ ist.}$$

Wendet man also die Berechnungsform der neue Grenze: $z - \frac{f(z)}{f'(z)}$, auf $z = a$ an, so entfernen sic die gefundenen Werthe von der Wurzel, anstatt sic ihr anzunähern. Es ist schon im §. 157 gefunden wo

en, dass diese Formel immer auf diejenige Grenze
nzuwenden ist, bei der f und f'' einerlei Zeichen
aben; dies will nun geometrisch so viel sagen als:
ei welcher die Curve der Abscissenaxe die erhabene
eite zukehrt. Noch kürzer kann man dies so fassen:
ı der Construction hängt die Lage der MA' von der
er Berührenden NB' ab, der sie parallel gezogen
eyn soll; die Construction muss also mit dem Ziehen
er Berührenden anfangen. Lassen wir nun auch die
echnung mit derjenigen Grenze beginnen, an der
ie Berührende zu ziehen ist, so können wir kurz sa-
en: *die Rechnung muss immer von der äusseren
er beiden Grenzen, zwischen denen der Durch-
chnittspunct liegt, ausgehen.* Wenn nun nach die-
er Regel die Grenze, von welcher die Rechnung aus-
ehen soll, richtig gewählt ist, so veranschaulichen
ie 4 Figuren 43 bis 46 weiter, wie die Einschnitte
er successiven Berührenden in die Abscissenaxe B',
B'' u. s. f. und ihrer Parallelen A', A'' u. s. f. dem
urchschnitte a immer näher rücken.

§. 161.

Wir können hier aber noch einen Näherungswerth
icht übergehen, auf den die Betrachtung der Fig. 47
ihrt. Er wird erhalten, wenn man die den beiden
renzen entsprechenden Puncte in der Curve: M, N,
urch eine Gerade verbindet und die Abscisse OS ih-
es Durchschnitts S mit der x-Axe berechnet. Aus
er Aehnlichkeit der Dreiecke AMS, BNS folgt leicht

$$AM+BN : AB = AM : AS,$$

. i.

$$f(b) - f(a) : b-a = -f(a) : AS;$$

nd hieraus

$$OS = OA+AS = a - f(a)\,\frac{b-a}{f(b)-f(a)};$$

der auch, da

$$AM+BN : AB = BN : BS,$$

. i.

$$f(b) - f(a) : b-a = f(b) : BS,$$

$$OS = OB-BS = b - f(b)\,\frac{b-a}{f(b)-f(a)}.$$

Bemerkenswerth ist hierbei noch folgendes. Setzen wi

$$b - a = \Delta a,$$

so wird
$$f(b) - f(a) = \Delta . f(a),$$

daher
$$\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = \frac{\Delta a}{\Delta . f(a)}.$$

Die Grenze von diesem Ausdrucke ist, wenn die Di ferenzen in die Differentiale übergehen,

$$\frac{da}{d.f(a)} \text{ d. i. } \frac{da}{da.f'(a)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Durch Einführung dieses Grenzquotienten wird au den Ausdrücken von *OS*

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} \text{ und } b - \frac{f(b)}{f'(a)},$$

welches die vorher erörterten Näherungswerthe sin Diese 5te Grenze ist also ein Werth, von dem di beiden brauchbaren Näherungswerthe um so wenige verschieden sind, je kleiner die Differenz $b-a$ is Die Figur stimmt mit diesem Resultate vollkomme zusammen.

§. 162.

Es lässt sich nun auch noch durch Zeichnun erläutern, dass die den 3 letzten Functionen $f''(x$ $f'(x)$, $f(x)$ zugehörenden Indices beziehungsweis 0, 0, 1 seyn müssen, wenn eine sichere Annäherun statt finden soll. Es ist hierbei hauptsächlich nur n thig, die beiden ersteren dieser Indices zu berücksic tigen, indem es zu deutlich in die Augen springt, da wenn der Index von $f(x)$ gleich oder grösser als eine grosse Unsicherheit der Resultate die Folge is wie a. E. von §. 159 schon hinlänglich bemerkt wurd übrigens sich dies auch von selbst versteht, wenn g zeigt seyn wird, dass, schon wenn die Werthe d Indices von $f'(x)$ und $f''(x)$ von 0 verschieden sin Unsicherheit bleibt, gesetzt auch, dass $f(x)$ den I dex 1 hat.

Wir können uns hierzu der Fig. 42 bedienen. Sind
l und B die Grenzen, so liegen zwischen ihnen ein
urchschnitt α, zwei Maxima μ und ν und ein Wende-
unct ϱ; es hat also $f(x)=0$ Eine, $f'(x)=0$ zwei, $f''(x)=0$
ine reelle Wurzel zwischen diesen Grenzen. Die Indices
nd also 1 2 1. Die Figur zeigt nun, dass, wenn man
ırch einen der Puncte M oder N eine Berührende,
ıd durch den andern von beiden eine Parallele zu
ieser Berührenden zieht, die Einschnitte in die Ab-
cissenaxe entfernter vom Durchschnitt α liegen wer-
en als A und B. Dasselbe gilt, wenn wir A' und B
ı Grenzen nehmen, wo die Indices 1 1 1 sind; selbst
ir A' und B'' kann dies statt haben, für welche Gren-
en die Indices 1 0 1 werden. Dagegen würden für
l und B', wo die Indices 0 1 1, wenn man die Be-
ihrende, der Regel gemäss, an N construirt, die
inschnitte den Durchschnitt enger einschliessen als
e Grenzen A und B'. Dass aber mit dieser Folge
er Indices nicht mehr Sicherheit der Annäherung ver-
unden ist als mit jeder andern von 0 0 1 verschiede-
en, zeigt sich sogleich, wenn man M'' auf derselben
eite nimmt, wo N' liegt. Dann nämlich wird eine
arallele durch M'' zur Berührenden an N' offenbar
e Abscissenaxe in einem Puncte treffen, der von α
ıtfernter ist als A'', obgleich die Indices noch 0 1 1
nd; es ist also die Annäherung auch hier völlig un-
cher. Diese Unsicherheit muss offenbar noch zu-
ehmen, wenn die Indices über 1 und 2 steigen, also
Folge dessen mehrere Maxima oder Minima und
Vendepuncte zwischen den gegebenen Grenzen liegen.
In allen diesen Fällen wird man also die Grenzen
weit zusammenzuziehen haben, bis zwischen ihnen
eder ein Maximum oder Minimum noch ein Wende-
ınct mehr enthalten ist. Dies wird nur dann sich nicht
isten lassen, wenn 1) entweder das Maximum oder
inimum mit dem Durchschnitt zusammenfällt, oder
der Durchschnitt zugleich ein Wendepunct ist. Im

ersten dieser Fälle werden $f(x)$ und $f'(x)$, im zwe
ten $f(x)$ und $f''(x)$ einen gemeinsamen Factor habe
der zwischen den Grenzen null wird. Die Untersu
chung fällt also dann mit der zu Anfange des §. 15
zusammen.

§. 163.

Zu jeder wahren Näherungsmethode ist erforde
lich, 1) dass die nach und nach erhaltenen Werth
der Wahrheit ohne Rückschritt immer näher komme
2) dass sie wechselsweise grösser und kleiner sind a
die gesuchte Grösse; und 3) dass man für jeden ei
zelnen Werth die Grösse angeben kann, unter we
cher der Fehler liegt, den man jedesmal begeht, i
dem man den Näherungswerth für den wahren set
Die vorgetragene Methode erfüllt die beiden erster
Bedingungen. Dass und wie sie der letztern Gnü
leistet, ist jetzt zu zeigen. Diese Untersuchung ka
nach Analogie der gleichen, welche beim numerisch
Gebrauch der unendlichen Reihen vorkommt, die *üb*
die Convergenz der Näherungswerthe genannt werde

Lassen wir den Buchstaben die ihnen in den v
hergehenden §§. gegebene Bedeutung und setzen

$$b - a = i; \quad b' - a' = i',$$

so folgt aus der Formel

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)},$$

dass $$a' = b - i - \frac{f(b-i)}{f'(b)}$$

$$= b - i - \frac{f(b) - i f'(b) + \frac{1}{2} i^2 f''(b-i \dots b)}{f'(b)}$$

folglich, da $$b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)},$$

$$b' - a' = i' = \frac{i^2 f''(b-i \dots b)}{2 f'(b)};$$

d. i. $$i' = \frac{i^2 f''(a \dots b)}{2 f'(b)}.$$

Hier ist noch der Zähler eine unbestimmte Grös-
e; wir können sie aber sogleich durch eine bekannte
setzen. Nehmen wir nämlich an, dass für die Gren-
n a, b die *vier* letzten Indices sind

$$0\ 0\ 0\ 1,$$

as sich durch Zusammenziehung der Grenzen immer
en so gut wird erreichen lassen als die vorher schon
mer vorausgesetzte Folge 0 0 1, so haben die Glei-
ungen $f'''(x)=0$, $f''(x)=0$ und $f'(x)=0$ zwischen
und b keine Wurzeln, jede der drei Functionen, die
n linken Theil dieser Gleichungen bilden, ist daher
nerhalb dieser Grenzen entweder durchaus positiv
ler durchaus negativ; es folgt aber auch hieraus zu-
eich ganz auf dieselbe Weise wie in §. 156, dass $f''(x)$
wohl als $f'(x)$ von a bis b entweder immer wach-
n oder immer abnehmen werden. Es ist daher ei-
r von den beiden Werthen $f''(a)$ und $f''(b)$ der
össte, der andre der kleinste unter allen durch
$'(a \ldots b)$ angedeuteten Werthen; dasselbe gilt in Be-
g auf f'. Werde daher der grössere der beiden
erthe $f''(a)$, $f''(b)$ durch $f''(\mathrm{B})$, dagegen der klei-
re der beiden Werthe $f'(a)$, $f'(b)$ durch $f'(\mathrm{a})$ be-
ichnet, so ist

$$\frac{f''(\mathrm{B})}{f'(\mathrm{a})} > \frac{f''(a \ldots b)}{f'(b)}$$

d daher

$$i' = \frac{i^2 f''(a \ldots b)}{2f'(b)} < \frac{i^2 f''(\mathrm{B})}{2f'(\mathrm{a})}.$$

$'(\mathrm{B})$ und $f'(\mathrm{a})$ sind hierbei ihrem *absoluten* Werthe
ch beziehlich die grössten und kleinsten Werthe der
nctionen $f''(x)$ und $f'(x)$ zwischen den gegebenen
renzen.

Hat man also aus a und b die beiden Näherun-
n a' und b' gefunden, von denen die erstere kleiner,
e zweite grösser ist als der wahre Werth der Wur-
l, so wird der Fehler, den man begeht, indem man

statt des letztern einen der beiden ersteren annimm
immer kleiner seyn als der absolute Werth von

$$\frac{i^2 f''(B)}{2f'(a)}.$$

Geht man nun von den neu gefundenen Grenzen a',
zu zweiten Näherungswerthen a'', b'' über, so wi
ganz auf dieselbe Weise, wenn $b'' - a'' = i''$ geset
wird, folgen, dass

$$i'' = \frac{i'^2 f''(a' \ldots b')}{2f'(b')},$$

und wenn B′ und a′ zu a', b' dieselben Beziehung
haben wie B und a zu a, b, so würde auch folgen, da

$$i'' < \frac{i'^2 f''(B')}{2f'(a')}.$$

Offenbar aber wird immer $f''(B) > f''(B')$ u
$f'(a) < f'(a')$, also

$$\frac{f''(B)}{f'(a)} > \frac{f''(B')}{f'(a')}$$

seyn: so dass also auch gesetzt werden kann

$$i'' < \frac{i'^2 f''(B)}{2f'(a)}.$$

Substituiren wir für i' die vorhergehende Gre
bestimmung, so kommt

$$i'' < i^4 \left(\frac{f''(B)}{2f'(a)}\right)^3.$$

Fahren wir in diesen Bestimmungen der Fehl
grenzen fort, so erhalten wir dafür folgende Ueb
sicht der nach und nach sich ergebenden Ausdrück

$$i;\ i^2 \frac{f''(B)}{2f'(a)};\ i^4 \left(\frac{f''(B)}{2f'(a)}\right)^3;\ i^8 \left(\frac{f''(B)}{2f'(a)}\right)^7;\ \text{u. f}$$

in recurrirender, für die Anwendung bequemerer D
stellung aber

$$i;\ i^2 \frac{f''(B)}{2f'(a)} = i';\ i'^2 \frac{f''(B)}{2f'(a)} = i'';\ i''^2 \frac{f''(B)}{2f'(a)} = i''' \text{ u. f}$$

Ganz auf dieselbe Weise kann auch für die
§. 161 aus der Secante gezogene fünfte Grenze e
Fehlerbestimmung gefunden werden. Da die Auf

ung derselben nach dem Vorhergehenden keine
chwierigkeit hat, so begnügen wir uns damit, das
rgebniss herzusetzen. Behalten nämlich alle Buch-
aben ihre bisherige Bedeutung, so findet sich

$$i' = i^2 \frac{f''(a \ldots b)}{2f'(b)} \cdot \frac{f(b)}{f(b)-f(a)},$$

so

$$i' < i^2 \frac{f''(\mathrm{B})}{2f'(\mathrm{a})} \cdot \frac{f(b)}{f(b)-f(a)},$$

oraus nun auch Bestimmungen für i'', i''' u. s. w.
icht abzuleiten sind. Die Benutzung dieser Grenze
t aber für die praktische Rechnung weniger vortheil-
aft als die einfacheren Bestimmungen, die vorher
elehrt wurden. Wir werden daher von ihr keinen
eitern Gebrauch machen.

§. 164.

Von dem analytischen Standpuncte aus ist die
ufgabe der annähernden Berechnung der Wurzeln
ner Gleichung im Vorstehenden vollständig gelöst.
er Erfinder oder Verbesserer dieser Methode, Fou-
er, hat aber die praktische Brauchbarkeit derselben
durch noch bedeutend erhöht, dass er auch an dem
unerischen Calcul, den sie erfordert, mehrere wich-
ge Verbesserungen anbringt, die besonders dahin
elen, jede überflüssige Rechnung zu ersparen. Diese
treffen zunächst die gemeine Division, die zur Be-
chnung der annähernden Werthe, vermöge der Aus-
ücke $\frac{f(b)}{f'(b)}$ und $\frac{f(a)}{f'(b)}$ gebraucht wird. In der Art,
e man dieselbe gewöhnlich ausführt, indem man mit
len Ziffern des Divisors gleich von Anfang in
n Dividend geht, ist ein grosser Aufwand zwecklo-
r Rechnung enthalten. Es ist nämlich klar, dass
r Bestimmung der ersten Ziffer des Quotienten schon
e Berücksichtigung nur weniger Anfangsziffern des
ivisors ausreicht, dass nur allmälig die diesen An-
ngsziffern folgenden auf die Richtigkeit der Ziffern

des Quotienten Einfluss haben werden und dass also ver-
gebliche Mühe angewendet wird, wenn man die Ziffer
des Divisors eher in die Rechnung einführt als si
auf den Quotienten von Einfluss sind. Zweckmässige
als die gemeine Division ist nun zwar die von Ougl
tred angegebene, die gewöhnlich in der Lehre vo
den Decimalbrüchen vorgetragen wird und dadurc
unnütze Rechnung erspart, dass sie bei einer gewis-
sen vorher bestimmten Anzahl von Ziffern, in welche
der Quotient richtig seyn soll, im Divisor allmälig di
erste, zweite, dritte Stelle u. s. f. von der niedrigste
an unberücksichtigt lässt; wobei sich ergiebt, dass
um eben so viel Ziffern als der Divisor hat, im Quo-
tienten richtig zu erhalten, man nur eine gleiche od
um eine Einheit grössere Anzahl von Anfangsziffer
des Dividendus nöthig hat. Allein auch diese abgekürz
Division ist noch nicht von allen überflüssigen Opera-
tionen befreit. Die Fourier'sche Regel dagegen wi
mit dem geringsten Aufwand von Ziffern immer nic
blos zu genäherten, sondern, wo dies möglich is
auch zu den vollkommen genauen Quotienten führe
Da die Regeln der Division immer auf der Zusam-
mensetzungsart der Ziffern der Factoren in der Mu-
tiplication beruhen, so müssen wir von Betrachtung
über das Verfahren der letztern ausgehen.

§. 165.

Seyen die beiden dekadischen Zahlen

$$10^4 a + 10^3 b + 10^2 c + 10 d + e \quad \text{und} \quad 10^3 \alpha + 10^2 \beta + 10 \gamma + \delta$$

in einander zu multipliciren. Man erhält auf die be-
kannte Weise

$$\begin{aligned}
&10^7 a\alpha + 10^6 b\alpha + 10^5 c\alpha + 10^4 d\alpha + 10^3 e\alpha \\
&\quad + 10^6 a\beta + 10^5 b\beta + 10^4 c\beta + 10^3 d\beta + 10^2 e\beta \\
&\quad\quad + 10^5 a\gamma + 10^4 b\gamma + 10^3 c\gamma + 10^2 d\gamma + 10 e\gamma \\
&\quad\quad\quad + 10^4 a\delta + 10^3 b\delta + 10^2 c\delta + 10 d\delta + e\delta.
\end{aligned}$$

Ist nun umgekehrt mit $10^4 a + 10^3 b + 10^2 c + 10 d + e$
in diesen Ausdruck zu dividiren, so besteht das ge-
meine Verfahren darin, dass man zuerst $10^3 \alpha$ such,

dem man das in der ersten Zeile der obigen Ent-
ickelung enthaltene Partialproduct so bestimmt, dass
; gleich oder kleiner als die Summe der 5 Anfangs-
ieder des Dividends wird, dabei aber jedenfalls das
'ste Glied $= 10^7 a\alpha$ ist. Zieht man hierauf das Pro-
ıct vom Dividend ab, so wird mit dem Reste auf
eiche Weise verfahren und dadurch für den Quotien-
n das zweite Glied $10^2\beta$ erhalten, welches in den
ivisor multiplicirt das zweite der obigen Theilpro-
ıcte giebt, welches vom ersten Reste abgezogen ei-
ɘn zweiten Rest lässt, aus dem die dritte Ziffer des
uotienten erhalten wird u. s. f. Statt dessen können
ir nun so verfahren. Wir wollen vom Divisor nur
nige der Anfangsziffern, z. B. zwei, also a und b
ɘrücksichtigen, diese überstreichen und daher den
ıerstrichenen Theil des Divisors oder kurzweg den
berstrichenen Divisor nennen. Mit diesem suchen
ir aus den Anfangsziffern des Dividend (*ersten par-
ellen Dividend*) die erste Ziffer des Quotienten α,
e von der Ordnung 10^3 ist und bilden das Product
$)^7 a\alpha + 10^6 b\alpha$, das vom Dividend abgezogen wird.
iesem Rest fügen wir die nächste Ziffer des Dividend
ei und machen ihn zum neuen Dividend, verbessern
n aber noch vorher dadurch, dass wir, auch auf die
e Ziffer des Divisors c Rücksicht nehmend, das Pro-
ıct $10^5 c\alpha$ bilden und vom neuen Dividend abziehen,
odurch wir einen 2ten partiellen verbesserten Divi-
enden erhalten. Damit jedoch diese Subtraction voll-
ɔgen werden könne, ist es natürlich erforderlich, dass
$)^6 a\beta \geqq 10^5 c\alpha$, d. i. dass $10a\beta \geqq c\alpha$, was, da c
der Werth von 0 bis 9, immer der Fall seyn wird,
enn $10a\beta \geqq 10\alpha$, also $a\beta \geqq \alpha$. Der 2te partielle ver-
esserte Dividend wird nun mit $10^6 a\beta + 10^5 b\beta$ anfan-
en, woraus also durch Division mit dem überstrichenen
ivisor die zweite Ziffer β des Quotienten gefunden
ird. Wir multipliciren und subtrahiren wie vorher,

und ziehen die nächste Ziffer des Dividend dazu. Zu Verbesserung des nun erhaltenen 3ten partiellen Dividends aber multipliciren wir α in d, und β in c (α in c ist schon benutzt worden), addiren beide Producte und ziehen sie ab. Damit dies aber möglich sey, muss $10^5 a\gamma \geqq 10^4 c\beta + 10^4 d\alpha$, d. i. $10 a\gamma \geqq c\beta + d\alpha$ seyn, was immer statt finden wird, wenn $a\gamma \geqq \alpha + \beta$. Der 3te partielle verbesserte Dividend fängt nun mit $10^5 a\gamma + 10^4 b\gamma$ an, daher die Division mit dem überstrichenen Divisor die dritte Ziffer des Quotienten giebt. Nachdem hiermit ersterer multiplicirt, das Product subtrahirt und die nächste Ziffer des Dividend zugezogen ist, verbessern wir den Rest, indem wir α in e, β in d, γ in c multipliciren, diese drei Producte addiren und vom Rest abziehen, wodurch wir den 4ten partiellen verbesserten Dividend erhalten. Diese Verbesserung wird aber nur dann Statt haben können, wenn $10^4 a\delta \geqq 10^3 c\gamma + 10^3 d\beta + 10^3 e\alpha$, d. i. $a\delta \geqq \alpha + \beta + \gamma$. Auf diesem Wege zu schliessen fortfahrend erhalten wir daher die im folgenden §. enthaltene allgemeine Divisionsregel, welche gilt, die Division mag aufgehen oder nur annähernd gefunden werden können.

§. 166.

Regel der geordneten Division: Man überstreiche eine oder einige Anfangsziffern des Divisors und bezeichne sie damit als partiellen Divisor, mit dem zunächst allein dividirt werden soll, und bemerke auf gleiche Weise als ersten partiellen Dividend eine gleiche, oder (wenn die erste Ziffer des Divisor grösser ist als die erste des Dividend) um eine Einheit grössere Anzahl von Anfangsziffern des Dividendus. Diese dividire man mit dem überstrichenen Divisor und bemerke den Quotienten, so erhält man die erste Ziffer des Gesammtquotienten. Hiermit multiplicire man den überstrichenen Divisor und subtrahire das Product. Man untersuche ferner, ob der Rest grösser als d

efundene erste Ziffer des Quotienten (oder mindestens gleich) ist. Findet sich dieses, so ziehe man ie nächste Ziffer dazu. Dies würde nun einen zwei- en partiellen Dividenden geben; es muss derselbe je- och zuvor noch verbessert werden. Dies geschieht, ndem man das Product aus der gefundenen ersten Zif- er des Quotienten in die erste, welche im Divisor uf die überstrichenen Ziffern folgt, subtrahirt. Mit em überstrichenen Divisor dividire man nun in diesen ten partiellen verbesserten Dividend wie vorher. Man ndet damit also eine 2te Ziffer des Quotienten. Nach- em das Product aus derselben in den überstrichenen Divisor abgezogen, ist nun zu untersuchen, ob der Rest grösser als die Summe der gefundenen beiden Ziffern des Quotienten (oder wenigstens gleich). Fin- let sich dieses, so ist die nächste Ziffer des Dividend uzuziehen und der so gebildete 3te partielle Dividend u verbessern. Dies geschieht, indem man (in Ge- lanken oder auf einem besondern Streifchen Papier) lie gefundnen Ziffern des Quotienten in umgekehrter Ordnung denjenigen Ziffern des Divisors untersetzt, lie den überstrichenen zunächt folgen, aus je zwei unter einander stehenden Ziffern das Product bildet, diese Producte addirt und von dem unverbesserten Dividend subtrahirt. So erhält man den 3ten partiellen verbesser- en Dividend. Jetzt beginnt die Division zum 3ten Male und giebt die 3te Ziffer des Quotienten. Der hierbei sich ergebende Rest darf nicht kleiner seyn als die Summe der drei Ziffern des Quotienten. Nachdem weiter die nächste Ziffer des Dividend zum Reste ge- zogen, tritt die Verbesserung ein. Man schreibt zu dem Ende die 3 Ziffern des Quotienten in umgekehr- ter Ordnung unter die dem überstrichenen Theil des Divisors zunächst folgenden drei Ziffern, bildet aus den unter einander stehenden Ziffern die Producte und addirt diese u. s. f. Allgemein wird man bei der *m*ten partiellen Division die *m* gefundenen Ziffern des

Quotienten unter die den überstrichenen des Divisors zunächst folgenden Ziffern in umgekehrter Ordnung zu setzen, je zwei unter einander stehende zu multipliciren und die Producte zu addiren haben, um die Verbesserung zu erhalten. Zuvor ist jedoch immer zu untersuchen, ob der letztgebliebene Rest gleich oder grösser als die Summe der bis dahin gefundenen Ziffern des Quotienten, und nur im bejahenden Falle ist die Operation fortzusetzen.

Im verneinenden Falle, also wenn der Rest kleiner ist als die Summe der gefundenen Ziffern des Quotienten, ist es zweifelhaft, ob sich die nachfolgende Verbesserung wird anbringen lassen, indem die Möglichkeit gegeben ist, dass der Subtrahend grösser sey als der Minuend. Findet sich dies wirklich, so ist die letzte Ziffer des Quotienten zu gross genommen und muss um eine Einheit vermindert werden, worauf die Operation wie vorher fortgesetzt wird. Findet sich aber, dass die Verbesserung dennoch angebracht werden kann, so ist zwar die letzte Ziffer des Quotienten richtig und man kann die Operation allerdings unverändert fortsetzen; die angezeigte Unsicherheit aber für die nächsten Operationen zu vermeiden, wird man mehr Ziffern des Divisors beachten, d. i. einen neuen überstrichenen Divisor bilden müssen, der eine Ziffer mehr enthält als der vorige; zur Ausgleichung dieser Aenderung des Divisors wird man aber sogleich noch eine Ziffer des Dividend dem letzten partiellen verbesserten Dividend beizufügen haben, und diesen vor der Division mit dem neuen überstrichenen Divisor mit Rücksicht auf diesen noch einmal verbessern. Der erweiterte Divisor wird dann beibehalten; doch könnte man auch zum ersten wieder zurückkehren, indem man mit demselben in den mittelst des erweiterten Divisors gebildeten letzten verbesserten Dividendus noch einmal ohne Zuziehung einer neuen Ziffer dividirte.

§. 167.

Wir erläutern jetzt diese Regel durch einige Beipiele und wählen zuerst ein solches, welches zeigt, ass die Regel nicht blos bei genäherter, sondern uch bei aufgehender Division das vollkommen scharfe Resultat giebt.

Divisor	Dividend	Quotient
$\bar{4}123$	$\overline{93}9599285$	21295,0
	88 | | | | | | |	

59 (5 > 2; die Ziffer 2 also sicher)
2 = 2.1 (Verbesserung)
57 (2ter verbesserter partieller Dividend)
44
135 (13 > 2 + 1, also 1 sicher)
5 = 1. 1 + 2. 2 (Verbesserung)
130 (3ter verbess. part. Divid.)
88
429 (42 > 2 + 1 + 2, also 2 sicher)
10 = 2.1 + 1.2 + 2.3 (Verbesser.)
419 (4ter verbess. part. Divid.)
396
239 (23 > 2 + 1 + 2 + 9, 9 sicher)
16 = 9. 1 + 2. 2 + 1. 3 (Verbess.)
223 (5ter verbess. part. Divid.)
220
32 (3 < 2 + 1 + 2 + 9 + 5, 5 zweifelhaft)
29 = 5.1 + 9.2 + 2.3 (Verbess.; lässt sich anbringen)
neuer überstrich. 38
Divisor = $\bar{4}41$) 37 = 5.2 + 9.3 (Verbess. weg. d. neuen überstr. Divis.)
15 (neuer verbess. part. Dividend.)
0
15 (15 < 2 + 1 + 2 + 9 + 5 + 0; 0 unsicher)
15 = 0.2 + 5.3 (Verbesserung)
0

Ohne Einführung des neuüberstrichenen Divisors steht die Rechnung so:

3 (6ter verbess. part. Dividend)
0
38 (3 < 2 + 1 + 2 + 9 + 5 + 0; 0 unsicher)
37 = 0. 1 + 5. 2 + 9. 3 (Verbesserung; lässt sich anbringen)
1 (7ter verbess. part. Dividend)
0
15 (1 < 2 + 1 + 2 + 9 + 5 + 0 + 0; 0 unsicher)
15 = 0.1 + 0.2 + 5.3 (Verbess.; lässt sich anbringen)
0

Der Quotient erschiene also dann in der Form 21295,00.

Da es lehrreich ist, an einem und demselben Beispiel verschiedene Methoden zu prüfen, so wollen wir voraussetzen, dass in dem vorstehenden Beispiel anfangs nur 4 der überstrichene Divisor sey. Dann ist die Ausführung folgende:

```
 Divisor      Dividend   Quotient
 4̄4123        9̄39599285|21295,0
              8||||     |
              13 (1<2, 2 zweifelhaft)
               8=2.4 (Verbesserung; lässt sich anbringen)
(neuer überstr. 59
 Divisor=44)  2=2.1 (Verbess. wegen des neuen Divisors)
              57 (neuer partieller Dividend)
              44
              135 (13>2+1; 1 sicher)
```

u. s. w., wie in der ersten Ausführung.

Ohne einen neuen überstrichenen Divisor einzuführen, würde die Rechnung so auszuführen gewesen seyn

```
4̄4123|9̄39599285|21295,000
      |8|||||||  |
   13 (1<2, 1 zweifelhaft)
    8=2.4 (Verbess.; lässt sich anbringen)
    5 (2ter part. verbess. Dividend)
    4
    19 (1<2+1, 2 zweifelhaft)
     6=1.4+2.1 (Verbesserung; lässt sich anbringen)
    13 (3ter part. verbess. Divid.)
     8
    55 (5=2+1+2; 2 sicher)
    13=2.4+1.1+2.2 (Verbess.)
    42 (4ter part. verbess. Dividend)
    36
     69 (6<2+1+2+9; 9 unsicher)
     46=9.4+2.1+1.2+2.3 (Verbess.; lässt sich anbringen)
     23 (5ter part. verbess. Dividend)
     20
      39 (3<2+1+2+9+5; 5 unsicher)
      36=5.4+9.1+2.2+1.3 (Verbess.; lässt sich anbringen)
       3 (6ter part. verbess. Dividend)
       0
       32 (3<2+1+2+9+5+0; 0 unsicher)
       29=0.4+5.1+9.2+2.3 (Verbess.; lässt sich anbringen)
        3 (7ter part. verbess. Dividend)
        0
        38 (3<2+1+2+9+5+0+0; 0 unsicher)
        37=0.4+0.1+5.2+9.3 (Verbess.; lässt sich anbringen)
         1 (7ter part. verbess. Dividend)
         0
         15 (1<2+1+2+9+5+0+0+0; 0 unsicher)
         15=0.4+0.1+0.2+5.3 (Verbess. lässt sich anbringen)
          0
```

Man sieht hier, dass die Operation einigermassen weitläufiger und durchgängig unsichrer ist.

Da keine dieser Ausführungen den Fall enthält, in welchem es nöthig ist, eine schon gesetzte Ziffer des Quotienten zu verbessern, so fügen wir noch folgendes von Fourier entlehnte Beispiel bei:

Divis.	Dividend.	Quotient.
234567898765	123456789873647	526,315(8)9...
	1170	7

645 (64>5; 5 sicher)
25=5. 5 (Verbess.)
620 (2ter part. verb. Divid.)
468
1526 (152>5+2; 2 sicher)
40=2.5+5.6 (Verbess.)
1486 (3ter part. verb. Divid.)
1404
827 (82>5+2+6; 6 sicher)
77=6.5+2.6+5.7 (Verbess.)
750 (4ter part. verb. Divid.)
702
488 (48>5+2+6+3; 3 sicher)
105=3.5+6.6+2.7+5.8 (Verbess.)
383 (5ter part. verb. Divid.)
234
1499 (149>5+2+6+3+1; 1 sicher)
126=1.5+3.6+6.7+2.8+5.9 (Verbess.)
1373 (6ter part. verb. Divid.)
1170
2038 (203>5+2+6+3+1+5; 5 sicher)
158=5.5+1.6+3.7+6.8+2.9+5.8 (Verb.)
1880 (7ter part. verb. Divid.)
1872
87 (8<5+2+6+3+1+5+8; 8 zweifelhaft)
206=8.5+5.6+1.7+3.8+6.9+2.8+5.7
(Verbess. nicht anzubringen; also 8 zu gross und dafür 7 zu setzen)

wiederholt 1880
1638
2427 (242>5+2+6+..+5+7; 7 sicher)
201=7.5+5.6 u. s. f. (Verb.)
2226 (8ter part. verb. Divid.)
2106
120 (120>5+2+6+..+5+7+9; 9 sicher)

u. s. f.

§. 168.

Diese geordnete Division kann, weil sie die Stellen des Divisors nur allmälig in die Rechnung einführt, auch gebraucht werden, um die reellen Wurzeln höherer Gleichungen unmittelbar zu berechnen. Wir begnügen uns, ein Beispiel für quadratische Gleichungen mitzutheilen, im Uebrigen auf Fourier's Werk*) verweisend.

Sey vorgelegt die Gleichung

$$x^2 + 765432\,x = 123456,$$

so bringt man sie auf die Form

$$x = \frac{123456}{765432 + x}.$$

Dann wird man nach der gegebenen Divisionsregel die ersten Ziffern des Quotienten aus dem Ausdruck zur Rechten unabhängig von dem Werthe von x im Divisor finden können, und zwar immer, mögen die numerischen Werthe irgend welche seyn: denn man wird einige oder die sämmtlichen Ziffern des numerischen Theils des Divisors als überstrichenen Divisor betrachten dürfen. Durch jede successiv gefundene Ziffer des Quotienten verbessert man aber sogleich den Divisor, wie die nachstehende Ausführung zeigt:

---

*) S. 193 ff.

```
765432      |123456,00000 |0,16128927
            | 765
              4695
                 4
765432,1      4691
              4590
               1016
                 27
...432,16       989
                765
               2240
                 24
...432,161     2216
               1530
                6860
                  24
...432,1612     6836
                6120
                 7160
                   52
...432,16128     7108
                 6885
                  2230
                   102
...432,161289     2128
                  1530
                   5980
                     67
...432,1612892     5913  u. s. w.
```

§. 169.

Es ist nun ferner zu überlegen, wie die in den llgemeinen Formeln der §§. 157 und 163 angezeig-en Substitutionen von Zahlwerthen in den allgemei-ien Functionen vorgenommen werden müssen, damit uch hier keine unnütze Rechnung ausgeführt werde.

Sey b der Grenzwerth der Wurzel, für welchen, venn er in den Functionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ u. s. f. ubstituirt wird, $f(b)$ und $f''(b)$ einerlei Zeichen ha-en, so dass also nach §. 157 von hier aus und nicht on dem andern Grenzwerth die Rechnung, wenn sie uf die einfachste Weise geführt werden soll, ausge-ien muss; so wird mit Hülfe der geordneten Division uerst

$$b' = b + \varepsilon = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

berechnet werden. Ein zweiter Näherungswerth b'' würde durch

$$b'' = b' + \varepsilon' = b' - \frac{f(b')}{f'(b')} = b + \varepsilon - \frac{f(b+\varepsilon)}{f'(b+\varepsilon)}$$

erhalten werden. Allein man würde unbequem und mit einem unnützen Aufwande von Mühe rechnen, wollte man die Substitutionen $f(b+\varepsilon)$ und $f'(b+\varepsilon)$ wirklich ausführen und den ersten dieser beiden Ausdrücke durch den andern dividiren. Zweckmässiger ist es die schon gefundenen Werthe $f(b)$ und $f'(b)$ zu benutzen, indem man bemerkt, dass, nach Taylor's Lehrsatz,

$$f(b+\varepsilon) = f(b) + \varepsilon f'(b) + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(b) + \frac{\varepsilon^3}{6} f'''(b) + \dots$$

Man wird nämlich zuerst die Werthe

$$f(b),\ f'(b),\ f''(b), \dots f^{(m-1)}(b)$$

in eine Reihe schreiben, ε bestimmen und damit jeden dieser Werthe, den ersten zur Linken ausgenommen, multipliciren, wodurch also die Werthe

$$\varepsilon f'(b),\ \varepsilon f''(b),\ \varepsilon f'''(b), \dots \varepsilon f^{(m-1)}(b)$$

erhalten werden. Mit Ausnahme des ersten zur Linken multiplicirt man diese ferner sämmtlich aufs Neue mit ε und dividirt zugleich mit 2, so ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f''(b),\ \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f'''(b), \dots \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 f^{(m-1)}(b).$$

Die Glieder dieser Reihe multiplicirt man, mit Ausnahme des ersten zur Linken, sämmtlich wiederum durch ε und dividirt durch 3, so folgt

$$\frac{1}{2.3}\varepsilon^3 f'''(b), \dots \frac{1}{2.3}\varepsilon^3 f^{(m-1)}(b),$$

u. s. f.

Addirt man nun die ersten Glieder aller dieser Reihen, desgleichen die zweiten, die dritten u. s. f. so ist klar, dass man damit beziehungsweise die Werthe

$$f(b+\varepsilon),\ f'(b+\varepsilon),\ f''(b+\varepsilon),\ \ldots$$

der $\quad f(b'),\ f'(b'),\ f''(b'),\ \ldots$

rhalten wird, mit welchen sich nun dieselbe Rechungsweise für den Näherungswerth b'' wiederholt.

§. 170.

Es bleibt nun noch übrig, aus den allgemeinen Untersuchungen des §. 163 über die Convergenz der Näherungswerthe zu bestimmen, bis auf wie viele Decimalstellen bei jeder einzelnen Annäherung der gefundene Werth genau ist, woraus, wenn man dies zum Voraus bestimmen kann, sich ergiebt, wie weit man bei der Entwickelung von ε durch geordnete Division gehen muss, um nutzlose Rechnung zu vermeiden und immer nur solche Decimalziffern zu erhalten, die vollkommen genau sind.

Im §. 163 sahen wir, dass, wenn man aus der Grenze b den Näherungswerth $b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ berechnet, der Fehler, den man begeht, indem man b' für die wahre Wurzel setzt,

$$< \frac{i^2 f''(\mathrm{B})}{2 f'(\mathrm{a})}$$

ist, wo $f''(\mathrm{B})$ den grössern der beiden Werthe $f''(a)$, $f''(b)$; dagegen $f'(\mathrm{a})$ den kleinern der beiden Werthe $f'(a)$, $f'(b)$ bedeutet. Man wird nun sowohl für den Ausdruck $\frac{f''(\mathrm{B})}{2f'(\mathrm{a})}$ als für $i = b - a$ Decimaleinheiten angeben können, die gleich oder zunächst grösser als diese Ausdrücke sind. Sey daher $\frac{f''(\mathrm{B})}{2f'(\mathrm{a})} \leqq \left(\frac{1}{10}\right)^k$ und $i \leqq \left(\frac{1}{10}\right)^n$, wo k und n ganze positive oder negative Zahlen seyn können (so dass z. B., wenn der erstere Ausdruck $= 0{,}004$, $k = 2$, nämlich $\left(\frac{1}{10}\right)^k = 0{,}01$,

oder wenn derselbe $= 4000$, $k = -4$, nämlic $\left(\frac{1}{10}\right)^k = \left(\frac{1}{10}\right)^{-4} = 10000$ ist); so wird

$$\frac{i^2 f''(\mathrm{B})}{2 f'(\mathrm{a})} \leqq \left(\frac{1}{10}\right)^{2n+k}$$

seyn. Hierbei ward angenommen, dass der Quotie[n] $\frac{f(b)}{f'(b)}$ vollkommen scharf bestimmt werde. Da ma[n] nun aber in den meisten Fällen mit einer mehr od[er] weniger langen Reihe von Decimalziffern sich wi[r] begnügen müssen, so hat man es hier eigentlich m[it] einem Quotienten der Form $\frac{f(a\ldots b)}{f'(a\ldots b)}$ und einem Nä[-] herungswerthe $= b - \frac{f(a\ldots b)}{f'(a\ldots b)}$ zu thun, in welche[n] Ausdrücken $(a\ldots b)$ eine zwischen a und b liegende Grös[se] bedeutet. Fand sich nun die Differenz der vollkom[-] men scharf berechneten Näherungswerthe $b' - a' =$ $= \frac{i^2 f''(a\ldots b)}{2 f'(b)}$, so werden wir sie gegenwärtig, na[ch] dem Vorbemerkten, $= \frac{i^2 f''(a\ldots b)}{2 f'(a\ldots b)}$ anzunehmen h[a-] ben. Aber auch dieser Ausdruck liegt unter d[er] Grenze $\frac{i^2 f''(\mathrm{B})}{2 f'(\mathrm{a})}$, da weder $f''(x)$ noch $f'(x)$ zw[i-] schen a und b ihr Zeichen ändern, folglich der grö[s-] sere oder kleinere der beiden zu a und b gehörig[en] Werthe dieser Functionen zugleich der grösste od[er] kleinste unter allen Zwischenwerthen ist. Demna[ch] wird also auch mit Rücksicht auf das blos genäher[te] Resultat der geordneten Division die Verbesserun[g], deren der Näherungswerth b' der Wurzel bedarf, er[st] mit der $(2n+k+1)$ten Stelle eintreten, also werd[en] die Ziffern bis zur $(2n+k)$ten Stelle, einschliesslic[h], richtig seyn. Nur bis dahin wird man daher die g[e-] ordnete Division zu führen haben.

§. 171.

Bleibt man nun in der annähernden Berechnung
on $-\frac{f(b)}{f'(b)}$ bei der $(2n+k)$ten Ziffer stehen, so ent-
teht noch die Frage, ob es genauer seyn wird, diese
ɛtztere so zu lassen, wie sie die Rechnung unmittel-
ar ergeben hat, oder sie, in Berücksichtigung der
achfolgenden Ziffern noch um eine Einheit zu ver-
ıehren.

Die kürzeste und bestimmteste Antwort lässt sich
ıittels der Figuren geben, die dem linken Theile der
leichung entsprechen. Da nämlich, nach §. 160,
nsre Rechnung immer von der *äussern* Grenze an-
ebt und $-\frac{f(b)}{f'(b)}$ die absolute Länge der Subtangente
usdrückt, so zeigt die blosse Betrachtung der 4 Fi-
uren 43 bis 46, welche die vier möglichen Fälle, die
ier vorkommen können, darstellen, dass, wenn man
ie Subtangente um eine auch noch so kleine Grösse
ermindert, man sich jederzeit von dem, dem wahren
Vurzelwerthe entsprechenden Durchschnittspuncte ent-
ɛrnt. Durch Vermehrung dagegen *kann* man wenig-
tens demselben näher kommen: dann nämlich, wenn
as Hinzugefügte weniger beträgt als die Entfernung
es genannten Durchschnitts von dem Endpuncte der
ubtangente. Wenn man aber den gefundenen Nä-
erungswerth in der letzten Stelle um eine Einheit
rhöht, so lässt sich leicht zeigen, dass man damit
inen Werth hinzufügt, der nie grösser ist als der
Interschied der Grenzen a' und b'. Denn da man die
ecimaleinheit $\left(\frac{1}{10}\right)^{2n+k}$ dem *genäherten* Werthe von
$-\frac{f(b)}{f'(b)}$ beifügt, so wird der *wahre* Werth dieses
usdrucks sicher niemals um mehr als um diese Grösse

vermehrt, und da $b' - a' \leqq \left(\frac{1}{10}\right)^{2n+k}$ war, so kan
diese Vermehrung höchstens so viel als der Unter
schied der Grenzen selbst betragen. In diesem un
günstigsten Falle würde man also von der Grenze b
durch Vermehrung derselben durch eine Einheit i
der letzten Stelle nur auf die Grenze a', nie jedoc
über dieselbe hinaus kommen. Es erhellt hieraus vo
selbst, dass nach Hinzufügung dieser Einheit es noc
ungewiss bleibt, ob die so bestimmte Grenze b' grös
ser oder kleiner als die wahre Wurzel ist, und das
man, um dies zu entscheiden, $x = b'$ in $f(x)$ substi
tuiren und durch Vergleichung des Zeichens von $f(b'$
mit den Vorzeichen von $f(a)$ und $f(b)$ ermitteln muss
welcher Fall hier statt findet.

Ist nun auf diese Weise b' bestimmt, so erhä
man sehr leicht eine zweite Grenze für die Wurze
ohne etwa die vorigen Rechnungen in Beziehung au
a erneuern zu müssen. Je nachdem nämlich b' grös
ser oder kleiner als der wahre Wurzelwerth ist, wir
man dasselbe nur um eine Einheit in der letzten De
cimalstelle beziehlich zu vermindern oder zu vermeh
ren haben, um zu einem Werthe zu gelangen, de
auf der entgegengesetzten Seite des Wurzelwerthe
liegt. Nennen wir diese zweite Grenze a', so kan
nun, indem man diejenige von beiden wählt, die sic
als die äussere zeigt, die Rechnung von Neuem be
ginnen. Da die erste Näherung aus einer Grenze, de
ren letzte Ziffer vom $n$ten Range, einen Näherungs
werth bildete, der bis in die $(2n+k)$te Stelle gena
war, so wird man jetzt, wo die letzte Ziffer der Grenz
vom $(2n+k)$ten Range ist, einen Näherungswerth e
halten, der noch in der $(4n+3k)$ten Stelle richtig is
Eine 3te Annäherung giebt auf gleiche Weise bis i
die $(8n+7k)$te Stelle richtige Ziffern u. s. f. Es is
aber klar, dass durch diese Rechnungen nur dann ei
Vortheil gewonnen wird, wenn $2n+k > n$, d. i. $n+k > 0$

ositiv. Diese Bedingung wird von selbst erfüllt, wenn
i und k zugleich positiv sind. Ist aber eine von bei-
len Grössen negativ, so ist immer zu untersuchen, ob
hr absoluter Werth auch kleiner als der der andern.
Findet dies nicht statt, so muss man durch Substitu-
ion von Werthen, die zwischen den anfänglichen
Werthen a und b liegen, neue Grenzen bilden, deren
Unterschied geringer, für welche also n grösser wird.
Da k der Ordnungsexponent der Decimaleinheit vom
ächst höheren Range als $\frac{f''(\mathrm{B})}{2f'(\mathrm{a})}$ war, im Allgemeinen
ber der Ausdruck um so kleiner wird, je kleiner die
Werthe sind, welche B und a bedeuten, so wird durch
Zusammenziehung der Grenzen meistens k grösser
verden, was also die Erfüllung der Bedingung $n+k>0$
begünstigt. Im Allgemeinen aber wird $n \stackrel{=}{>} 1 - k$
seyn müssen.

§. 172.

Es wird für die Anwendungen von Nutzen seyn,
lie Resultate der gesammten Untersuchungen dieses
Abschnittes, wie im vorhergehenden, in eine einzige
allgemeine Regel zusammenzufassen.

Um aus zwei gegebenen Grenzen a und b, zwi-
schen denen die Gleichung $f(x) = 0$ Eine, die abge-
eiteten Gleichungen $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, $f'''(x) = 0$
aber keine — und zwar weder reelle noch imagi-
näre — Wurzeln haben, zwei neue Grenzen zu er-
halten, welche dieselbe Wurzel enger einschliessen,
ist Folgendes zu beobachten:

1) Man dividire den, absolut genommen, grössern
Zahlwerth der beiden Ausdrücke $f''(a)$ und $f''(b)$ durch
len kleinern von den beiden $2f'(a)$ und $2f'(b)$, wo-
bei man sich mit der ersten Ziffer des Quotienten be-
gnügen kann, und bemerke den Rang der nächst

höheren Decimaleinheit. Sey dieselbe $= \left(\frac{1}{10}\right)^k$, wo k eine positive oder negative Zahl ist.

2) Man bestimme die Decimaleinheit, welche gleich oder nächst grösser ist als die absolut genommene Differenz der beiden Grenzen a und b und nenne sie $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ (wo n wie k sowohl eine positive als negative ganze Zahl seyn kann), und untersuche, ob $n \overline{\gtrless} 1-k$. Leisten a und b dieser Bedingung nicht Gnüge, so bilde man durch Substitution von Werthen zwischen a und b neue Grenzen, bis sie erfüllt wird.

3) Man bemerke diejenige der beiden Grenzen, die in den Functionen $f(x)$ und $f''(x)$ substituirt Resultate mit gleichen Vorzeichen giebt. Habe b diese Eigenschaft.

4) Man dividire nach der Regel der geordneten Division $f(b)$ durch $f'(b)$ und entwickele den Quotienten bis zur $(2n+k)$ten Stelle, erhöhe die letzte Ziffer um eine Einheit und ziehe den nun erhaltenen Werth von b ab. Die hierdurch gebildete neue Grenze heisse b'. Durch Substitution derselben in $f(x)$ ergiebt sich, ob sie grösser oder kleiner ist als die Wurzel; jedenfalls aber ist sie bis zur $(2n+k)$ten Stelle genau.

5) Zu der gefundenen neuen Grenze b' finde man eine zweite, mit ihr gemeinschaftlich die Wurzel einschliessende a', indem man sie um eine Einheit in der letzten Stelle vermehrt oder vermindert, je nachdem b' kleiner oder grösser als die Wurzel gefunden wurde.

6) Die Rechnung beginnt nun in Beziehung auf a' und b' von Neuem in gleicher Weise, wie sie bis hierher in Hinsicht auf a und b geführt wurde. Doch wird man bei den Substitutionen von b' in den Functionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ u. s. f. unnütze Wiederholungen der Rechnung vermeiden, wenn man $b' = b +$

setzt und dann $f(b+\varepsilon)$, $f'(b+\varepsilon)$ u. s. f. nach dem Taylor'schen Lehrsatz entwickelt denkt, wie im §. 169 näher erörtert wurde.

Es darf nicht übersehen werden, dass diese Regel nicht blos zur Annäherung dient, sondern diese nur dann giebt, wenn eine genaue Berechnung wegen irrationaler Beschaffenheit der Wurzel unmöglich ist. Ist dagegen letztere eine ganze Zahl oder ein geschlossener oder periodischer Decimalbruch, so werden diese Zahlen durch die Regel auch genau gefunden werden, indem, wenn der vermeintliche Näherungswerth mit der Wurzel selbst zusammenfällt, sich dies bei der Substitution in $f(x)$ ergiebt, auch die Bedingung No. 2 die Grenzen bis auf den Unterschied einzelner Einheiten zusammenzuziehen nöthigt.

§. 173.

Wenden wir jetzt diese Regel in aller Ausführlichkeit auf ein Beispiel an. Im §. 139 sahen wir, dass die Gleichung

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0,$$

deren abgeleitete Functionen

$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 7,$$
$$f''(x) = 6x - 8,$$
$$f'''(x) = 6$$

sind, drei reelle Wurzeln hat, von denen die erste zwischen -10 und -1, die zweite zwischen 0 und 1, die dritte zwischen 1 und 10 liegt. Bestimmen wir die mittlere. Die Indices für das Intervall $0 \ldots 1$ sind 0 0 0 1; die Näherungsrechnung kann also beginnen.

Es ist $f''(0) = -8$; $f''(1) = -2$;
$f'(0) = -7$; $f'(1) = -12$;
also $2f'(0) = -14$; $2f'(1) = -24$;

also der absolute Zahlwerth von

$$\frac{f''(B)}{2f'(a)} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} = 0,5\ldots$$

Die nächsthöhere Decimaleinheit zu 0,5 ist 1. Daher $1 = \left(\frac{1}{10}\right)^k$ gesetzt, $k = 0$ folgt. Es ist aber $b - a = 1 - 0 = 1$. Daher $1 = \left(\frac{1}{10}\right)^n$ gesetzt, $n = ($ folgt. Es ist also $n < 1 - k$. Die Grenzen sind daher enger zusammenzuziehen. Substituiren wir demnach $x = \frac{1}{2} = 0{,}5$, so kommt

	$f'''(x)$	$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
(0)	+6	—8	—7	+4
(0,5)	+6	—5	—10,25	—0,375

Die Wurzel liegt also zwischen 0 und 0,5. Da aber vorauszusehen ist, dass n seinen Werth 0 behält, indem hier $b - a = 0{,}5 - 0 = 0{,}5$ würde, wozu die nächsthöhere Decimaleinheit 1 ist, und k ebenfalls $= 0$ bleibt, so müssen die Grenzen noch enger genommen werden. Wir substituiren daher 0,4 und finden in Beziehung auf die in der obersten Zeile enthaltenen Functionen für

(0,4)	+6	—5,6	—9,72	+0,624.

Die Wurzel liegt hiernach zwischen 0,4 und 0,5. Für diese Grenzen ist $b - a = 0{,}1$, daher aus $\frac{1}{10} = \left(\frac{1}{10}\right)$ $n = 1$. Ferner ist

$\frac{f''(B)}{2f'(a)} = \frac{5{,}60}{19{,}44} = 0{,}2\ldots$; also $k = 0$, wie vorher daher jetzt $n = 1 - k$, woraus man ersieht, dass diese Grenzen zu einer Annäherung tauglich sind.

Man bemerkt ferner sogleich, dass 0,5, für welchen Werth $f(x)$ und $f''(x)$ einerlei Zeichen haben die *äussere Grenze* ist; wir setzen also $0{,}5 = b$.

Die geordnete Division des absoluten Zahlwerthe von $f(0{,}5) = 0{,}375$ durch $f'(0{,}5) = 10{,}25$ giebt bi zur $(2n+k)$ten $=$ 2ten Decimalstelle ausgeführt 0,03. Vermehrt man die letzte Ziffer um eine Einheit un subtrahirt dann den erhaltenen Werth 0,04 von 0,5

so bleibt als *erster Näherungswerth* 0,46, von dem beide Ziffern genau richtig sind. Ob er grösser oder kleiner als die Wurzel ist, muss weiter untersucht werden.

Wir entwickeln demnach, wie folgt,
$f(0{,}46) = f(0{,}4+0{,}06)$; $f'(0{,}46) = f'(0{,}4+0{,}06)$
u. s. w. nach §. 169.

$f(0,4)$	$f'(0,4)$		$f''(0,4)$		$f'''(0,4)$
+0,624	−9,72		−5,6		+6
	0,06		0,06		0,06
	−0,5832		−0,336		+0,36
			0,06		0,06
			−0,02016		+0,0216
		2)	−0,01008	2)	+0,0108
					0,06
					+0,000648
				3)	+0,000216

Hieraus ergiebt sich

$f(0,46)$ = +0,624	$f'(0,46)$ = −9,72	$f''(0,46)$ = −5,6	$f'''(0,46)$ = +6,
−0,5832	−0,336	+0,36	
−0,01008	+0,0108	= −5,24	
+0,000216	= −10,0452		
= +0,030936			

und man ersieht sogleich, wenn man die Vorzeichen von $f(0{,}46)$ und $f(0{,}5)$ vergleicht, dass der Näherungswerth 0,46 kleiner als die Wurzel. Setzen wir daher $0{,}46 = a'$, so wird $0{,}47 = b'$, folglich $b' - a' = 0{,}01$, woraus $n = 2$.

Um k zu ermitteln, bedarf es erst der Entwickelung der Werthe von $f(0{,}47) = f(0{,}46 + 0{,}01)$; $f'(0{,}47) = f'(0{,}46+0{,}01)$; u. s. w. Man findet

$f(0,46)$	$f'(0,46)$		$f''(0,46)$		$f'''(0,46)$
+0,030936	−10,0452		−5,24		+6
	0,01		0,01		0,01
	−0,100452		−0,0524		+0,06
			0,01		0,01
			−0,000524		+0,0006
		2)	−0,000262	2)	+0,0003
					0,01
					+0,000003
				3)	+0,000001

und hieraus

$$
\begin{array}{llll}
f(0{,}47)=+0{,}030936 & f'(0{,}47)=-10{,}0452 & f''(047)=-5{,}24 & f'''(0{,}47)=+ \\
\quad -0\,100452 & \quad -\ 0{,}0524 & \quad +0{,}06 & \\
\quad -0{,}000262 & \quad +\ 0{,}0003 & \quad =-5{,}18 & \\
\quad +0{,}000001 & \quad =-10{,}0973 & & \\
\quad =-0{,}069777 & & &
\end{array}
$$

Es wird nun $\frac{f''(B)}{2f'(a)} = \frac{5{,}24}{20{,}0904} = 0{,}2\ldots < 1$
also $k=0$, wie zuvor.

Die Gleichartigkeit der Zeichen von $f(0{,}47)$ un $f''(0{,}47)$ giebt ferner zu erkennen, dass 0,47 die *äus sere Grenze* ist. Wir entwickeln daher bis zu $(2n+k)$ten $=$ 4ten Stelle

$$\frac{f(0{,}47)}{f'(0{,}47)} = \frac{0{,}069777}{10{,}0973} = 0{,}0069\ldots$$

Wird die letzte Decimalstelle um 1 erhöht, wor aus also 0,0070 folgt, und dieser Werth von 0,47 ab gezogen, so bleibt als *zweiter Näherungswerth* 0,463(der in der 4ten Decimalstelle noch richtig ist.

Um zu wissen, ob dieser Werth grösser oder klei ner als die Wurzel, und um zu einer dritten Nähe rung fortzuschreiten, entwickeln wir

$$f(0{,}4630),\ f'(0{,}4630) \text{ u. s. f.}$$

Es ist nämlich

$$
\begin{array}{llll}
f(0{,}46) & f'(0{,}46) & f''(0{,}46) & f'''(046) \\
+0{,}030936 & -10{,}0452 & -5{,}24 & +6 \\
 & \quad 0{,}003 & \quad 0{,}003 & \quad 0{,}003 \\
 & -0{,}0301356 & -0{,}01572 & +0{,}018 \\
 & & \quad 0{,}003 & \quad 0{,}003 \\
 & & 2)\ -0{,}00004716 & 2)\ +0{,}000054 \\
 & & \quad -0{,}00002358 & \quad +0{,}000027 \\
 & & & \quad 0{,}003 \\
 & & & 3)\ +0{,}000000081 \\
 & & & \quad +0{,}000000027
\end{array}
$$

und daher

$$
\begin{array}{ll}
f(0{,}4630) = +0{,}030936 & f'(0{,}4630) = -10{,}0452 \\
\quad -0{,}0301356 & \quad -\ 0{,}01572 \\
\quad -0{,}00002358 & \quad +\ 0{,}000027 \\
\quad +0{,}000000027 & \quad =-10{,}060893 \\
\quad =+0{,}000776847 & \\
f''(0{,}4630) = -5{,}24 & f'''(0{,}4630) = +6. \\
\quad +0{,}018 & \\
\quad =-5{,}222 &
\end{array}
$$

Die Vergleichung von $f(0{,}4630)$ mit $f(0{,}47)$ hinsichtlich des Zeichens lehrt nun, dass 0,4630 kleiner als die Wurzel. Setzen wir daher $0{,}4630 = a''$, so wird $0{,}4631 = b''$, folglich $b'' - a'' = 0{,}0001$, woraus $n = 4$.

Zur Bestimmung von k bilden wir ferner

$$f(0{,}4631),\quad f'(0{,}4631) \text{ u. s. w.}$$

Es ist

$f(0{,}4630)$	$f'(0{,}4630)$	$f''(0{,}4630)$	$f'''(0{,}4630)$
$+0{,}000776847$	$-10{,}060893$	$-5{,}222$	$+6$
	$0{,}0001$	$0{,}0001$	$0{,}0001$
	$-0{,}0010060893$	$-0{,}0005222$	$+0{,}0006$
		$0{,}0001$	$0{,}0001$
		$-0{,}00000005222$	$+0{,}00000006$
		2) $-0{,}00000002611$	2) $+0{,}00000003$
			$0{,}0001$
			$+0{,}000000000003$
			3) $+0{,}000000000001$

folglich

$$f(0{,}4631) = +0{,}000776847 - 0{,}0010060893 - 0{,}00000002611 + 0{,}000000000001 = -0{,}000229268409$$

$$f'(0{,}4631) = -10{,}060893 - 0{,}0005222 + 0{,}00000003 = -10{,}06141517$$

$$f''(0{,}4631) = -5{,}222 + 0{,}0006 = -5{,}2214 \qquad f'''(0{,}4631) = +6.$$

Nunmehr wird

$$\frac{f''(\mathrm{B})}{2f'(\mathrm{a})} = \frac{5{,}222}{20{,}121786} = 0{,}2\ldots < 1, \text{ also bleibt } k = 0.$$

Die Gleichartigkeit der Zeichen von $f(0{,}4631)$ und $f''(0{,}4631)$ bezeichnet ferner 0,4631 als die *äussere* der beiden Grenzen a'' und b''. Wir entwickeln daher bis zur $(2n+k)$ten $=$ 8ten Decimalstelle den Quotienten

$$\frac{f(0{,}4631)}{f'(0{,}4631)} = \frac{0{,}000229268409}{10{,}06141517} = 0{,}00002278\ldots$$

Die letzte Decimalstelle werde um eine Einheit erhöht, so kommt 0,00002279. Dies von 0,4631 abgezogen giebt den *dritten Näherungswerth* 0,46307721 ..., der noch in der 8ten Decimalstelle richtig ist. Wir

bleiben hierbei stehen, da der Gang der Rechnung aus dem Vorstehenden schon hinlänglich erhellt.

Für die andere positive Wurzel findet man den Werth 5,19852321...; für die negative —1,66160042...; die algebraische Summirung dieser drei Wurzeln giebt 4,00000000...., also, wie es seyn muss, den gleichen und entgegengesetzten Werth des Coefficienten von x^2 in der vorgelegten Gleichung.

Als zweites Beispiel, bei dem wir uns begnügen, die Resultate anzugeben, wählen wir die auch schon von Lagrange*) und Cauchy**), jedoch mit geringerer Schärfe aufgelöste Gleichung

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Sie hat drei reelle Wurzeln, und zwar zwei positive und eine negative, nämlich folgende:

$$-3{,}04891734;\ +1{,}35689587;\ +1{,}69202147.$$

Ihre algebraische Summe ist = 0,00000000; ihr Product = 7,00000000. Die Uebereinstimmung dieser Werthe mit den Coefficienten des zweiten und des letzten Gliedes bestätigt ihre Richtigkeit.

---

*) *Équat. numér. Ch. IV.*

**) *Analyse algébrique T. I. Note III.*

Zehnter Abschnitt.

Fourier's zweite und dritte Regel zur Erkennung der imaginären Wurzeln; Berechnung derselben.

---

§. 174.

Wir haben im achten Abschnitt gesehen, dass die Unterscheidung der imaginären Wurzeln von den reellen nur in dem Falle eine umständlichere Untersuchung nothwendig macht, in welchem durch einen geraden Index der Function $f(x)$ zwischen zwei Grenzen a und b eine gerade Anzahl von Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ angezeigt ist, und dass es hierbei nur nöthig war, *die* Voraussetzung zu verfolgen und zu erörtern, nach welcher die Indices drei in der Mitte oder am Ende der Functionenreihe befindlicher successiver Functionen 0 1 2 sind, indem, wenn sich für die Gleichung $f^{(n-1)}(x)=0$ imaginäre Wurzeln ergeben, daraus auch für die ursprüngliche $f(x)=0$ dergleichen folgten. Wenn wir daher neue Kennzeichen der imaginären Wurzeln aufsuchen, so werden wir, ohne unsre Untersuchung zu beschränken, annehmen können, dass folgendes Schema gelte:

		$f''(x)$	$f'(x)$	$f(x)$
(a)	…	$\pm$	$\mp$	$\pm$
	…	0	1	2
(b)		$\pm$	$\pm$	$\pm$

Denn was sich für dieses ergiebt, gilt auch für die Functionen $f^{(n+1)}$, $f^{(n)}$, $f^{(n-1)}$, wenn sie dieselben Zeichen wie die vorstehenden haben.

Nach dieser Annahme hat nun die Gleichung $f'(x)=0$ zwischen a und b eine reelle Wurzel, die γ heissen mag. Gesetzt, sie wäre genau bekannt, so würde, wenn man sie in $f(x)$ substituirte und $f(\gamma)$ sich $\mp$ ergäbe, die Gleichung $f(x)=0$ zwischen a und b zwei reelle Wurzeln haben, die durch $x=\gamma$ getrennt wären; fände sich dagegen $f(\gamma)\pm$, so zeigte der Index 2 nur zwei imaginäre an, indem, wenn man die Functionsreihen (γ), $(<\gamma)$, $(>\gamma)$ bildet, nach der Regel vom doppelten Zeichen sich ergiebt, dass bei γ zwei Wurzeln verloren gegangen sind, oder auch nach de Gua's Satze die Gleichartigkeit der Vorzeichen von $f(x)$ und $f''(x)$ für den Werth, der $f'(x)=0$ macht, die imaginären Wurzeln zu erkennen giebt. Annäherungsweise kann man nun zwar, wie der vorhergehende Abschnitt gelehrt hat, γ in beliebiger Schärfe immer berechnen. Allein die Substitution des genäherten Werthes kann im Allgemeinen kein vollkommen sicheres Resultat gewähren, da eine sehr kleine Aenderung von x schon hinlänglich seyn kann, um ein positives oder negatives $f(x)$ beziehlich in ein negatives oder positives zu verwandeln. Es ist daher die Aufgabe: aus den Grenzen a und b, zwischen denen eine und nur Eine reelle Wurzel γ der Gleichung $f'(x)=0$ enthalten ist, zu bestimmen, welches Zeichen die Function $f(x)$ annimmt, wenn in ihr $x=\gamma$ gesetzt wird. Diese Aufgabe soll jetzt auf eine andere Weise als diejenige in §. 146 ff. gelöst werden.

§. 175.

Wir fassen die Frage zuvörderst unter folgendem allgemeineren Gesichtspunct. Eine reelle, aber ihrem genauen Werthe nach unbekannte Wurzel γ einer Gleichung $F(x)=0$ ist zwischen den beiden gegebe-

en Grenzen a und b enthalten; man verlangt das /orzeichen des Werthes zu kennen, den eine andere 'unction $f(x)$ annimmt, wenn in ihr $x=\gamma$ gesetzt vird.

Sey $F(x)$ ein Polynom vom $n$ten, $f(x)$ ein sol-hes vom $m$ten Grade. Bilden wir die beiden Reihen

$$(a) \quad F^{(n)}(a),\ F^{(n-1)}(a),\ \ldots\ F''(a),\ F'(a),\ F(a);$$

$$(b) \quad F^{(n)}(b),\ F^{(n-1)}(b),\ \ldots\ F''(b),\ F'(b),\ F(b);$$

o folgt aus der Voraussetzung, nach welcher γ eine wischen a und b liegende Wurzel der Gleichung $F(x)=0$, dass der letzte Index dieser Reihen $=1$ eyn wird: denn wäre er grösser als 1, so würden ich die Grenzen so weit zusammenziehen lassen, bis r sich auf 1 verminderte. Man bilde nun auch für $f(x)$ die entsprechenden Functionenreihen

$$(a) \quad f^{(m)}(a),\ f^{(m-1)}(a),\ \ldots f''(a),\ f'(a),\ f(a);$$

$$(b) \quad f^{(m)}(b);\ f^{(m-1)}(b),\ \ldots f''(b),\ f'(b),\ f(b);$$

o werden, wenn wir vor der Hand besondere Rela-ionen zwischen $F(x)$ und $f(x)$, die Ausnahmen von ler allgemeinen Regel machen mögen, bei Seite sez-en, die Grenzen a und b so nahe an einander lie-gend gedacht werden können, dass der letzte Index ler beiden auf $f(x)$ sich beziehenden Reihen $=0$ wird. Denn stellen wir $F(x)$ und $f(x)$ geometrisch lurch die Ordinaten von Curven dar, so wird die Wur-el γ einen Durchschnitt der der Function $F(x)$ ent-prechenden Curve bezeichnen, der zwischen a und b iegt. Es würde dann allemal eine besondere Bezie-ung zwischen $F(x)$ und $f(x)$ voraussetzen, wenn wischen denselben Grenzen auch ein merkwürdiger Punct der Curve, welche zu $f(x)$ gehört — sey er ein Maximum oder ein Minimum, ein Wende- oder Schlan-genpunct — läge. Findet nun diese Bedingung statt, so ändert $f(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ sein Zeichen nicht; das Vorzeichen jedes Werthes von $f(x)$, der einem x angehört, das zwischen a und b liegt, mit-

hin auch $f(\gamma)$, ist also genau dasselbe, wie das der Werthe $f(a)$ und $f(b)$. Es kommt also im Allgemeinen darauf an, die reelle Wurzel γ der Gleichung $F(x)=0$ in so enge Grenzen einzuschliessen, dass für die zu $f(x)$ gehörigen Functionenreihen (a), (b) der letzte Index zur Rechten $=0$ werde.

§. 176.

Der vorliegende Fall, um dessen willen diese allgemeineren Betrachtungen angestellt wurden, ist nun allerdings ein solcher Ausnahmefall, für welchen sich die angegebenen Bedingungen nicht erfüllen lassen. Hier ist nämlich $F(x) = f'(x)$ und daher die Functionenreihe, welche sich auf $f(x)$ bezieht, die um ein Glied verlängerte Reihe der $F(x)$. Nun kann man zwar beliebig nahe Grenzen finden, die eine Wurzel der Gleichung $f'(x)=0$ einschliessen, aber immer wird zwischen denselben Grenzen entweder ein Paar imaginärer Wurzeln oder wenigstens eine reelle der Gleichung $f(x)=0$ liegen, wenn es nämlich gelingt, durch Zusammenziehung der Grenzen die fraglichen beiden Wurzeln, deren Natur ja eben entschieden werden soll, zu trennen; ursprünglich ist also der letzte Index des Intervalls $a\ b$ für $f(x)$ immer $=2$, und kann, wenn zwischen a und b eine Wurzel von $f'(x)=0$ liegen soll, nie kleiner als 1 werden. Oder gehen wir auf die Darstellung der Functionen $F(x)$ und $f(x)$ durch Curven zurück, so findet hier eben eine solche besondere Beziehung zwischen beiden Functionen statt, dass an derselben Stelle, bei welcher die Curve für $F(x) = f'(x)$ einen Durchschnitt, die Curve für $f(x)$ einen merkwürdigen Punct, nämlich einen solchen hat, für welchen die Berührende der Abscissenaxe parallel ist.

Um nun demohngeachtet aus den gegebenen Grenzen der reellen Wurzel γ der Gleichung $f'(x)=0$ das Zeichen von $f(\gamma)$ zu bestimmen, wird es, nach dem

Bisherigen, darauf ankommen, eine Function $\varphi(x)$ einzuführen, die für $x = \gamma$ einerlei Zeichen mit $f(\gamma)$ hat, übrigens aber in einer solchen Beziehung zu $f'(x)$ steht, dass die allgemeine Betrachtung des vorigen §. in Beziehung auf sie keiner Ausnahme unterworfen ist. Von dieser Beschaffenheit ist die Form

$$\varphi(x) = f(x) + f'(x).$$

Denn da für $x = \gamma$, $f'(x) = 0$, so wird dann $\varphi(\gamma) = f(\gamma)$, also hat $\varphi(x)$ dasselbe Zeichen wie $f(x)$, und da $\varphi(x)$ nicht mehr eine Derivation von $f(x)$ ist, so gehören die Werthe, welche $\varphi(x) = 0$ machen, auch nicht mehr zu merkwürdigen Puncten der durch $f(x)$ ausgedrückten Curve. Man wird daher die Functionenreihen

$$\begin{array}{llllll} \varphi^{(m)}(a), & \varphi^{(m-1)}(a), & \ldots & \varphi''(a), & \varphi'(a), & \varphi(a) \\ \varphi^{(m)}(b), & \varphi^{(m-1)}(b), & \ldots & \varphi''(b), & \varphi'(b), & \varphi(b) \end{array}$$

bilden, in welchen a und b die Grenzen der Wurzel γ der Gleichung $f'(x) = 0$ sind, und untersuchen, ob der letzte Index dieser Reihen null ist; im Falle aber, dass dieses nicht statt findet, die Grenzen so weit zusammenziehen, bis diese Bedingung erfüllt wird. Dann also sind die Zeichen von $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ und $f(\gamma)$ einerlei. Findet sich hiernach $f(\gamma)$ bei dem in §. 174 zum Grunde gelegten Schema der Indices $\mp$, so sind die beiden angezeigten Wurzeln reelle, die durch $x = \gamma$ sich trennen lassen; sie sind aber imaginär, wenn $f(\gamma)$ sich $\pm$ findet.

Diese beiden Reihen der Functionen, welche aus $\varphi(x)$ abgeleitet sind, lassen sich ungemein leicht aus den Reihen, welche sich auf $f(x)$ beziehen, entwickeln. Denn da $\varphi(x) = f(x) + f'(x)$, so folgt $\varphi'(x) = f'(x) + f''(x)$; $\varphi''(x) = f''(x) + f'''(x)$ u. s. f. Man hat also nur zu jedem Gliede der Reihen, welche zu $f(x)$ gehören, das nächst vorhergehende zu addiren, um ein entsprechendes Glied der Reihe für $\varphi(x)$ zu erhalten.

§. 177.

Fassen wir nun diese Ergebnisse in folgende allgemeine Regel zusammen:

Seyen gegeben die beiden Grenzen a und b eines Wurzelpaares der Gleichung $f(x)=0$; aus denen man die Functionenreihen (a) und (b) gebildet habe, in welchen Zeichen und Zahlwerth der Functionen bemerkt seyn mag, und deren letzte Indices 0 1 2 seyn sollen Die Gleichung $f'(x)=0$ hat demnach eine reelle Wurzel zwischen diesen Grenzen; ob die beiden angezeigten Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ reell oder imaginär sind, ist zu entscheiden. Man bilde zu diesen Zwecke aus den genannten ersten zwei neue Reihen die mit (A) und (B) bezeichnet werden mögen, indem man zu jedem Gliede der ersteren das nächstvorhergehende hinzufügt. Ist der letzte Index dieser beiden Reihen von Null verschieden, so sind die Grenzen a, b enger zusammenzuziehen, wodurch sie in a', b' übergehen mögen. Würden hierdurch die fraglichen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ getrennt, so wäre die Frage entschieden. Bleibt aber dann immer noch der letzte Index der neuen Reihen (a'), (b')...2, so wird man, bei hinlänglicher Fortsetzung dieses Verfahrens sicher Reihen der Form (A), (B) bilden können, für welche der letzte Index $=0$ ist. Dies zeigt an, dass die letzten Glieder beider Reihen einerlei Zeichen haben. Giebt nun die Vergleichung dieses Zeichens mit demjenigen von $f''(a)$ oder $f''(b)$ das Resultat, dass sie gleichartig sind, so sind die fraglichen Wurzeln imaginär, sind aber die Zeichen entgegengesetzt, so sind die Wurzeln reell.

§. 178.

Wir controliren mit Hülfe dieser Regel einige nach der früheren Methode ausgeführte Beispiele.

1) In §. 139, 3 ist bewiesen, dass die Gleichung

$$f(x)=x^5+x^4+x^2-25x-36=0$$

zwischen $x=-10$ und $x=-1$ zwei Wurzeln hat, deren Beschaffenheit näher zu bestimmen ist. Die letzten Indices dieses Intervalls sind 0 1 2, daher die vorstehende Regel anwendbar. Es finden sich zuerst folgende beide Reihen:

	f^{V},	f^{IV},	f''',	f'',	f',	f
(−10)	+120	−1176	+5760	−18798	+45775	−89686
(−1)	+120	−96	+36	−6	−26	−10

Hieraus bilden wir für $\varphi(x) = f(x) + f'(x)$ folgende Zeichenreihen

	φ^{V},	φ^{IV},	φ''',	φ'',	φ',	φ
(−10)	+	−	+	−	+	−
	0	1	1	1	1	2
(−1)	+	+	−	+	−	−

Der letzte Index ist also von 0 verschieden; es sind demnach die Grenzen enger zusammenzuziehen. In der That werden durch −2 die beiden angezeigten Wurzeln getrennt, wie in §. 147 sich ergeben hat; sie sind also reell.

2) Für die Gleichung

$$f(x)=x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101=0$$

(§. 139, 2 und §. 143) finden wir, dass

	f^{V},	f^{IV},	f''',	f'',	f',	f
(2)	+120,	+168,	− 48,	−82,	+30,	−21
	0	0	1	0	1	2
(3)	+120,	+288,	+180,	−26,	−43,	−32

Die Indices zeigen die Anwendbarkeit unsrer Regel. Es ergiebt sich

	φ^{V},	φ^{IV},	φ''',	φ'',	φ',	φ
(2)	+	+	+	−	−	+
	0	0	0	1	0	1
(3)	+	+	+	+	−	−

Da der letzte Index von 0 verschieden ist, so sind die Grenzen zusammenzuziehen. Man findet aber

	f^{V},	f^{IV},	f''',	f'',	f',	f
(2,2)	+120	+192	−12	−88,08	+12,872	−16,69248

welche Reihe mit (3) verglichen die Indices

0 0 1 0 1 2

giebt. Bilden wir nun die Reihen für φ, so findet sich

	φ^{V},	φ^{IV},	φ''',	φ'',	φ',	φ
(2,2)	+	+	+	−	−	−
	0	0	0	1	0	0
(3)	+	+	+	+	−	−

Der letzte Index ist also nun 0. Die Function $f(x)$ hat also zugleich mit $\varphi(x)$ zwischen 2,2 und 3 das Zeichen —, und da sie für diese Grenzwerthe dasselbe Zeichen hat (auch in diesem Intervall die Zeichen von $f''(x)$ immer negativ sind), so sind die angezeigten beiden Wurzeln imaginäre.

Im Allgemeinen wird sich bei der Berechnung einer grössern Anzahl von Beispielen finden, dass diese zweite Methode weniger bequem und kurz ist als die erste, indem namentlich die grössere Anzahl der über dies häufig mit zusammengesetzteren Zahlen vorzunehmenden Substitutionen ermüdet.

§. 179.

Das in §. 146 gefundene Kennzeichen imaginärer Wurzeln ist noch einer andern Auffassung fähig, welche weiter entwickelt zu einer neuen dritten Regel zur Unterscheidung der reellen und imaginären Wurzeln führt. Wenn für die beiden Werthe a und b das Schema

		f'',	f',	f
(a)	....	$\pm$	$\mp$	$\pm$
		0	1	2
(b)	....	$\pm$	$\pm$	$\pm$

zum Grunde gelegt wird, so können wir $f(x)$ unter der Form $f(a+(x-a))$ entwickeln in

$$f(x)=f(a)+(x-a)\,f'(a\ldots x).$$

Da $f''(x)$ zwischen a und b sein Zeichen nicht ändert, so ist für die oberen Zeichen des Schema's $f'(a) < f'(a\ldots x) < f'(b)$; daher

$$f(x) > f(a) + (x-a)\,f'(a).$$

Stellt man nun $f(x)$ durch die Ordinate einer Curve dar, so bedeutet $f(a)+(x-a)\,f'(a)$ die ver

änderliche Ordinate der Geraden, welche diese Curve in dem zur Abscisse $x=a$ gehörigen Puncte berührt. Die Ungleichung $f(x) > f(a) + (x-a)f'(a)$ zeigt, dass diese Gerade innerhalb der Grenzen a und b immer zwischen der Curve und Abscissenaxe liegt. Wird also letztere von der Geraden in einem Puncte geschnitten, der nicht zwischen den Grenzen a, b liegt, so kann innerhalb derselben auch die Curve nicht die Abscissenaxe schneiden oder berühren. Die Abscisse des Einschnitts der Geraden in die x-Axe erhalten wir aber, wenn wir

$$f(a) + (x-a)f'(a) = 0$$

setzen, woraus $x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ folgt, welcher Werth, wegen des positiven $f(a)$ und negativen $f'(a)$, grösser als a ist. Soll also der demselben zugehörige Punct nicht innerhalb der Grenzen a und b auf der x-Axe liegen, so muss

$$a - \frac{f(a)}{f'(a)} \geqq b \qquad (1)$$

seyn. Gehen wir auf der andern Seite von der Grenze b aus, so ergiebt sich

$$f(x) = f(b-(b-x)) = f(b) - (b-x)f'(b \ldots x)$$
$$f(x) > f(b) - (b-x)f'(b).$$

Der rechte Theil drückt die Ordinate der Berührenden an dem Puncte der Curve, dessen Abscisse b ist, aus. Die Abscisse ihres Einschnittes in die x-Axe folgt aus

$$f(b) - (b-x)f'(b) = 0,$$
$$x = b - \frac{f(b)}{f'(b)};$$

und dieselben Schlüsse wie die vorhergegangenen zeigen, dass die Curve die Abscissenaxe zwischen den gegebenen Grenzen nicht wird schneiden können, wenn

$$b - \frac{f(b)}{f'(b)} \leqq a \qquad (2)$$

Die Verbindung der beiden Bedingungen (1) und (2) würde

$$\frac{f(b)}{f'(b)} + \frac{f(a)}{-f'(a)} \geqq 2(b-a)$$

geben. Allein es ist klar, dass die vorstehende Betrachtung auch zu folgender erweitert werden kann. Wo auch immer die berührende Gerade in die Abscissenaxe eintreffen möge, so wird zwischen diesem Einschnittspunct und dem Fusspunct des Berührungspunctes die Curve die Abscissenaxe nicht schneiden können; also, wenn wir von a ausgehen, nicht zwischen a und $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$; wenn wir von b ausgehen, nicht zwischen b und $b - \frac{f(b)}{f'(b)}$. Im ersteren Falle kann also die Curve innerhalb der Entfernung $-\frac{f(a)}{f'(a)}$ von a nach b, im andern innerhalb der Entfernung $\frac{f(b)}{f'(b)}$ von b nach a die Abscissenaxe nicht treffen. Ist daher die Summe dieser Entfernungen grösser oder gleich der Differenz von b und a, d. i.

$$(3) \qquad \frac{f(b)}{f'(b)} + \frac{f(a)}{-f'(a)} \geqq b-a,$$

so schneidet die Curve in dem Intervall $b-a$ die Abscissenaxe nirgends. Schreiben wir nun noch die Ausdrücke (1) und (2) wie folgt

$$\frac{f(a)}{-f'(a)} \geqq b-a \text{ und } \frac{f(b)}{f'(b)} \geqq b-a,$$

so ziehen wir daraus die Regel des §. 146: dass, wenn die Quotienten $\frac{f(a)}{-f'(a)}$ und $\frac{f(b)}{f'(b)}$ *einzeln oder in Summe* grösser oder gleich $b-a$ sind, innerhalb des Intervalls $a \ldots b$ keine reellen Wurzeln vorkommen. Es bedarf kaum der Erwähnung, dass ganz dasselbe und auf dieselbe Weise sich ergiebt, wenn

die unteren Zeichen des obigen Schema's zum Grunde gelegt werden.

§. 180.

Anstatt die Entwickelung von $f(x)$ schon mit dem zweiten Gliede abzubrechen, kann man sie aber auch bis zum dritten fortsetzen. Dann werden wir, wenn, wie vorher, die drei letzten Indices 0 1 2 seyn sollen, und als vierter vom Ende noch eine 0 hinzukommt, folgende vier Zeichenschemata unterscheiden müssen.

			f''',	f'',	f',	f
(1)	(a)	...	+	+	−	+
	(b)	...	+	+	+	+
(2)	(a)	...	−	+	−	+
	(b)	...	−	+	+	+
(3)	(a)	...	+	−	+	−
	(b)	...	+	−	−	−
(4)	(a)	...	−	−	+	−
	(b)	...	−	−	−	−

Da $f'''(x)$ auf Gestalt und Lage keinen in die Augen fallenden Einfluss hat, so bedarf es nach §. 144 keiner wiederholten Erläuterung, dass die beiden ersten dieser Schemata, je nachdem zwischen a und b zwei reelle oder zwei imaginäre Wurzeln enthalten sind, einer der Figuren 35 oder 36, die beiden letzten aber für die gleichen Fälle einer der Figuren 37 oder 38 entsprechen. Setzen wir nun wieder $f(x) = f(a+(x-a))$, so erhalten wir

$$f(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a \ldots x).$$

Bleiben wir nun zunächst beim ersten Schema stehen, so ersieht man aus den Zeichen von $f'''(x)$, dass $f''(x)$ von a bis b fortwährend wächst, also $f''(a) < f''(a \ldots x) < f''(b)$ ist. Hieraus folgt

$$f(x) > f(a) + (x-a)\, f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a).$$

Denken wir uns nun den Ausdruck zur Linken als Ordinate der parabolischen Curve vom $m$ten Grade, so wird der zur Rechten ebenfalls die Ordinate einer parabolischen Curve, aber vom 2ten Grade, ausdrücken, welche die erstere, in dem der Abscisse a entsprechenden Puncte osculirt. Die erste Derivation des rechten Theils nach x ist nämlich

$$f'(a) + (x-a) f''(a),$$

ein Ausdruck, der für $x = a$ in $f'(a)$, d. i. in den Werth übergeht, den $f'(x)$ für $x = a$ annimmt. Die zweite Derivation ist $f''(a)$, also $= f''(x)$ für $x = a$. Die eben gefundene Ungleichung zeigt, dass die osculirende Curve im vorliegenden Falle zwischen den gegebenen Grenzen immer unter der osculirten liegt. Trifft daher jene nicht die Abscissenaxe, so kann auch diese mit ihr keinen Punct gemein haben.

Setzen wir daher, um die Abscisse des Einschnittes der osculirenden Curve in die x-Axe zu erhalten,

$$f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) = 0,$$

so kommt, wenn wir diese Gleichung für x auflösen,

$$x = a + \frac{-f'(a) \pm \sqrt{(f'(a))^2 - 2f(a) f''(a)}}{f''(a)}.$$

Nach dem im vorhergehenden §. genommenen Gange würden wir nun untersuchen, unter welchen Bedingungen dieser Werth $\geqq b$, also einem Punct angehört, der nicht innerhalb des Intervalls $a \dots b$ liegt. Aber einfacher ist es, zu bemerken, wenn das Radical imaginär. Es ist klar, dass dies geschieht, wenn

$$(f'(a))^2 < 2f(a) f''(a).$$

Dann also hat die osculirende, mithin auch die der Function $f(x)$ entsprechende Curve zwischen a und b keinen reellen Durchschnitt mit der x-Axe; die innerhalb dieser Grenzen angezeigten Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ sind also *imaginär*.

Mit Benutzung von $f''(b)$ können wir ein zweites Kennzeichen erhalten. Es ist nämlich auch

$$f(x) < f(a) + (x-a)\, f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(b).$$

Wird daher auch hier der rechte Theil als Ordinate einer Curve betrachtet, so wird diese die Curve, welche dem linken Theil entspricht, einfach berühren (nicht osculiren, weil die zweiten Derivationen für $x=a$ verschiedene Werthe haben, nämlich $f''(a)$ und $f''(b)$). Zugleich ist klar, dass die berührende Curve über der berührten liegt. Schneidet daher jene die Abscissenaxe, so muss sie auch diese schneiden. Setzen wir nun, um die Abscisse des Einschnitts zu finden,

$$f(a) + (x-a)\, f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\, f''(b) = 0,$$

so giebt diese Gleichung

$$x = a + \frac{-f'(a) \pm \sqrt{(f'(a))^2 - 2 f(a)\, f''(b)}}{f''(b)}$$

So lange dieser Ausdruck reell ist, so lange schneidet die berührende, folglich auch die berührte Curve die Abscissenaxe. Dies geschieht, so lange

$$(f'(a))^2 > 2 f(a)\, f''(b).$$

Diese Ungleichung ist also ein Kennzeichen *reeller* Wurzeln zwischen a und b.

§. 181.

Anstatt von der Grenze a können wir auch von b ausgehen. Dann setzen wir

$$f(x) = f(b-(b-x)) = f(b) - (b-x) f'(b) + \frac{(b-x)^2}{2} f''(x \ldots b),$$

woraus

$$f(x) < f(b) - (b-x) f'(b) + \frac{(b-x)^2}{2}\, f''(b),$$

$$f(x) > f(b) - (b-x)\, f'(b) + \frac{(b-x)^2}{2}\, f''(a).$$

Die Ausdrücke zur Rechten und Linken wieder als Ordinaten von Curven betrachtet, so wird die

$f(x)$ entsprechende Curve von der obern der beiden Curven zur Rechten osculirt, von der untern berührt. Erstere liegt über, letztere unter der Curve, welche zu $f(x)$ gehört. So lange also jene die x-Axe schneidet, hat die Curve für $f(x)$ reelle Wurzeln; so wie, wenn die unterhalb liegende berührende Curve keine reellen Durchschnitte hat, diese auch der Curve für $f(x)$ mangeln, also imaginäre Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ anzeigen. Indem man nun weiter den Weg verfolgt, der dem Gange der Untersuchung im vorigen §. ganz analog ist, findet sich, dass die Gleichung $f(x)=0$ zwischen a und b nothwendig *reelle* Wurzeln hat, wenn

$$(f'(b))^2 > 2f(b)\,f''(b);$$

dass sie dagegen *imaginär* sind, wenn

$$(f'(b))^2 < 2f(b)\,f''(a).$$

Wir haben also für das Schema (1) in §. 180 zwei Kennzeichen von reellen und zwei von imaginären Wurzeln erhalten. Ist nämlich

$$(1)\left\{\begin{array}{ll} & (f'(a))^2 < 2f(a)\,f''(a), \\ \text{oder} & (f'(b))^2 < 2f(b)\,f''(a), \end{array}\right.$$

so sind die beiden Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ zwischen a und b *imaginär*; ist aber

$$(2)\left\{\begin{array}{ll} & (f'(a))^2 > 2f(a)\,f''(b), \\ \text{oder} & (f'(b))^2 > 2f(b)\,f''(b), \end{array}\right.$$

so sind die Wurzeln in dem genannten Intervall *reell*.

Jede von diesen vier Bedingungen ist für sich schon entscheidend, aber es ist nicht nothwendig, dass eine von allen statt finde; vielmehr kann eben so wohl auch das Gegentheil von ihnen insgesammt gelten. Offenbar bleibt dann die Natur der zwischen a und b enthaltenen Wurzeln unentschieden. Man ersieht aber aus den vorstehenden Formeln leicht, dass man durch Zusammenziehung der Grenzen auf eine dieser Bedingungen kommen wird. Denn seyen z. B. die Wurzeln imaginär und gefunden $(f'(a))^2 > 2f(a)\,f''(a)$, so wird, wenn man die Wurzeln zwischen engere Gren-

zen einschliesst, $f'(a)$ bis auf Null abnehmen können, da, unter Voraussetzung der Indices 0 1 2, bei imaginären Wurzeln an dem Puncte der Curve, in welchem der Durchschnitt mit der Abscissenaxe verloren gegangen ist, die Berührende der Abscissenaxe parallel liegt, indess $f(a)$ und $f''(a)$ nicht unter gewisse endliche Werthe herabsinken. Oder habe die Gleichung zwischen a und b reelle Wurzeln und habe sich gefunden $(f'(a))^2 < 2f(a)\, f''(b)$, so wird durch Vermehrung von a, je mehr dessen Werth der wahren Wurzel nahe kommt, um so mehr $f(a)$ sich der Null nähern, indess $f'(a)$ und $f''(b)$ immer über gewissen endlichen Werthen liegen. Findet also für irgend ein gegebenes a und b keine der obigen 4 Bedingungen statt, so ist dies ein Zeichen, dass man, um die Natur der zwischenliegenden Wurzeln zu erkennen, die Grenzen zu verengern hat.

§. 182.

Alles bis hierher Gesagte bezieht sich nur auf das Schema (1) des §. 180. Sehen wir jetzt, welche Modificationen die erhaltenen Resultate erleiden, wenn wir die übrigen Schemata zum Grunde legen.

Was also *zuerst* No. (2) betrifft, so zeigt das negative Zeichen von $f'''(x)$ neben dem positiven von $f''(x)$, dass letzteres zwischen a und b ununterbrochen abnimmt; daher ist jetzt

$$f''(a) > f''(a \ldots x) > f''(b),$$

und folglich

$$f(x) < f(a) + (x-a)\, f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\, f''(a).$$

Die osculirende Curve liegt also hier über der osculirten, und wenn jene, so wird auch diese Durchschnitte, die Gleichung $f(x)=0$ also reelle Wurzeln haben. Setzt man nun den rechten Theil der obigen Ungleichung wieder $=0$ und schliesst wie in §. 180

a. E., so wird man finden, dass die beiden Wurzeln zwischen a und b *reell* sind, wenn

$$(f'(a))^2 > 2f(a)\,f''(a).$$

Aus dem Obigen folgt unmittelbar auch

$$f(x) > f(a) + (x-a)\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\,f''(b);$$

die dem Ausdruck zur Rechten zugehörige Curve berührt dann blos die Curve des linken Theils und liegt unter der letztern; daher die Wurzeln zwischen a und b *imaginär* sind, wenn

$$(f'(a))^2 < 2f(a)\,f''(b).$$

Gehen wir von der Grenze b aus, so finden wir

$$f(x) > f(b) - (b-x)\,f'(b) + \frac{(b-x)^2}{2}\,f''(b);$$

daher *imaginäre* Wurzeln zwischen a und b, wenn

$$(f'(b))^2 < 2\,f(b)\,f''(b);$$

aber auch

$$f(x) < f(b) - (b-x)\,f'(b) + \frac{(b-x)^2}{2}\,f''(a);$$

folglich *reelle* Wurzeln, wenn

$$(f'(b))^2 > 2f(b)\,f''(a).$$

Also erhalten wir unter Voraussetzung des zweiten Zeichenschema's *reelle* Wurzeln, wenn

$$(1)' \quad \begin{cases} (f'(a))^2 > 2\,f(a)\,f''(a) \\ \text{oder } (f'(b))^2 > 2f(b)\,f''(a); \end{cases}$$

imaginäre, wenn

$$(2)' \quad \begin{cases} (f'(a))^2 < 2f(a)\,f''(b) \\ (f'(b))^2 < 2f(b)\,f''(b). \end{cases}$$

§. 183.

Wenden wir uns 2) zum Schema (3) in §. 180, so ist der absolute Werth von $f''(x)$ zwischen a und b fortwährend im Abnehmen, also

$$-f''(a) > -f''(a\ldots x) > -f''(b)$$

oder

$$f''(a) < f''(a\ldots x) < f''(b);$$

folglich

$$f(x) > f(a) + (x-a)\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\,f''(a);$$

s liegt also die osculirte Curve über der osculiren-
len. Da jedoch die Ordinaten beider für $x = a$ ne-
gativ sind, so wird jene Durchschnitte haben, wenn
liese deren hat; daher hat $f(x)=0$ zwischen a und b
wei *reelle* Wurzeln, wenn

$$(f'(a))^2 > 2\,f(a)\,f''(a).$$

Es ist aber auch

$$f(x) < f(a) + (x-a)\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\,f''(b);$$

lie berührte Curve liegt unter der berührenden, beide
aber haben für $x = a$ negative Ordinaten; woraus
folgt, dass $f(x) = 0$ *imaginäre* Wurzeln zwischen
a und b hat, wenn

$$(f'(a))^2 < 2\,f(a)\,f''(b).$$

Von der andern Grenze b ausgehend finden wir

$$f(x) > f(b) - (b-x)\,f'(b) + \frac{(b-x)^2}{2}\,f''(a),$$

$$f(x) < f(b) - (b-x)\,f'(b) + \frac{(b-x)^2}{2}\,f''(b).$$

Durch ähnliche Betrachtungen wie die vorhergehenden findet man hieraus, dass unsre Gleichung zwischen den gegebenen Grenzen zwei *reelle* Wurzeln haben wird, wenn

$$(f'(b))^2 > 2\,f(b)\,f''(a);$$

dass sie aber *imaginär* sind, wenn

$$(f'(b))^2 < 2\,f(b)\,f''(b).$$

Stellen wir also die Resultate für das dritte Schema zusammen, so ist jede der Ungleichungen

$$\left.\begin{array}{l}(f'(a))^2 > 2\,f(a)\,f''(a),\\ (f'(b))^2 > 2\,f(b)\,f''(a),\end{array}\right\}\quad (1)''$$

ein Kennzeichen *reeller;* dagegen jede der Ungleichungen

$$\left.\begin{array}{l}(f'(a))^2 < 2\,f(a)\,f''(b),\\ (f'(b))^2 < 2\,f(b)\,f''(b),\end{array}\right\}\quad (2)''$$

ein Kennzeichen *imaginärer* Wurzeln.

§. 184.

Es bleibt uns nun noch das Schema (4) übrig. Hier ist der absolute Werth von $f''(x)$ von a bis b ununterbrochen im Steigen, also

$$-f''(a) < -f''(a\ldots x) < -f''(b),$$

oder

$$f''(a) > f''(a\ldots x) > f''(b);$$

$$f(x) < f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a),$$

$$f(x) > f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(b);$$

woraus gefunden wird, dass

$$(f'(a))^2 < 2f(a)f''(a)$$

ein Kennzeichen *imaginärer*,

$$(f'(a))^2 > 2f(a)f''(b)$$

ein Kennzeichen *reeller* Wurzeln ist.

Für die Grenze b aber ist

$$f(x) > f(b) - (b-x)f'(b) + \frac{(b-x)^2}{2}f''(b),$$

$$f(x) < f(b) - (b-x)f'(b) + \frac{(b-x)^2}{2}f''(a);$$

und ergiebt sich, dass, wenn

$$(f'(b))^2 > 2f(b)f''(b),$$

die Wurzeln *reell*, aber wenn

$$(f'(b))^2 < 2f(b)f''(a),$$

dieselben *imaginär* sind. Alles zusammengefasst, sind also für das 4te Schema die Ungleichungen

$$(1)''' \left\{ \begin{array}{l} (f'(a))^2 < 2f(a)f''(a), \\ (f'(b))^2 < 2f(b)f''(a), \end{array} \right.$$

Kennzeichen *imaginärer*; die Ungleichungen

$$(2)''' \left\{ \begin{array}{l} (f'(a))^2 > 2f(a)f''(b), \\ (f'(b))^2 > 2f(b)f''(b), \end{array} \right.$$

aber Kennzeichen *reeller* Wurzeln.

§. 185.

Die Schemata (1) und (4) haben also einerseits, so wie die (2) und (3) andrerseits gemeinschaftliche

Kennzeichen der Beschaffenheit der zwischen a und b enthaltenen Wurzeln. Will man alle Fälle unter eine einfache gemeinsame Regel befassen, so ist noch überdies zu bemerken, dass die Theile der Ungleichungen, welche die Kennzeichen reeller Wurzeln bilden, durch $>$, dagegen die Theile derer, welche imaginäre Wurzeln zu erkennen geben, durch $<$ verbunden sind; dass endlich der absolute Werth der Function $f''(x)$ in (1) und (4) von a bis b ununterbrochen wächst, in (2) und (3) abnimmt. Hierauf beruht nun folgende allgemeine Regel:

Wenn zwei Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ zwischen zwei gegebenen Grenzen a und b liegen, für welche die letzten Indices zur Rechten 0 0 1 2 sind (und man sich zuvor überzeugt hat, dass die Wurzeln keine *gleichen* reellen seyn können), so werden diese

1) *reell* seyn, wenn wenigstens eins der Quadrate der Werthe der ersten Derivation für die Grenzen a und b grösser ist als das doppelte Product aus dem Werthe der Stammfunction für dieselbe Grenze in denjenigen der Werthe der zweiten Derivation für die beiden Grenzen, welcher absolut genommen der grössere ist;

2) *imaginär*, wenn wenigstens eins der Quadrate von $f'(a)$ und $f'(b)$ grösser ist als das doppelte Product aus dem beziehlich zu nehmenden Werthe $f(a)$ oder $f(b)$ in denjenigen der beiden Werthe $f''(a)$ und $f''(b)$, welcher absolut genommen der kleinere ist.

Findet keine von diesen Bedingungen statt, so sind die Grenzen so weit zusammenzuziehen, bis eine oder mehrere derselben erfüllt werden.

Wir finden nicht für nöthig, diese Regel noch besonders durch Beispiele zu erläutern.

§. 186.

Alle Untersuchungen über die imaginären Wurzeln, die sowohl in diesem Abschnitte, als in dem

achten und den früheren geführt worden sind, hatten nur ihre Unterscheidung von den reellen und die dadurch erzielte Sicherheit der genauen oder genäherten Berechnung der letzteren zum Zwecke. Allein da die imaginären Wurzeln eben so bestimmte Grössen sind als die reellen, so erfordert wenigstens die wissenschaftliche Vollständigkeit (wenn auch vor der Hand weniger der praktische Bedarf) auch die Auflösung der Aufgabe: die reellen Werthe von t und u aufzufinden welche zu der Form $t+u\sqrt{-1}$ verbunden, und für in den linken Theil einer vorgegebenen Gleichung $f(x)=0$ substituirt, denselben auf Null reduciren. Offenbar muss die Zahl der Werthe dieser Grösse eben so gross seyn als die der nach einer der vorgetragenen Methoden erkannten verloren gegangenen Wurzeln. Wir lösen diese Aufgabe, welche Fourier gänzlich unberührt gelassen hat, zuerst auf einem von Lagrange gezeigten Wege*).

In §. 111 ist vermittelst §. 94 und 95 gelehrt worden, wie man aus den blossen Coefficienten einer gegebenen Gleichung $f(x)=0$ und ohne die Wurzeln derselben zu kennen, eine Gleichung bilden kann, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen der Wurzeln der gegebenen sind. Enthält nun diese imaginär Wurzeln, die, wie wir wissen, paarweise in der Form $t+u\sqrt{-1}$, $t-u\sqrt{-1}$ vorkommen, so ist das Quadrat der Differenz eines solchen Wurzelpaars offenbar von der Form $-4u^2$, also eine reelle negative Grösse. Dagegen werden die Quadrate der Differenzen der reellen Wurzeln, mögen sie nun positiv oder negativ seyn, immer reelle positive Resultate geben; die Quadrate der Differenzen nicht zusammengehöriger imaginärer Wurzeln endlich im Allgemeinen imaginär Ausdrücke seyn. Denn sey eine erste imaginäre Wu

---

*) *Équat. numér. Chap. II.* vgl. *Addit. art. I. remarque* 4.

zel $= t_1 + u_1\sqrt{-1}$, eine zweite mit ihr nicht conjugirte $= t_2 + u_2\sqrt{-1}$, so wird im Allgemeinen

$$((t_1-t_2)+(u_1-u_2)\sqrt{-1})^2 = (t_1-t_2)^2-(u_1-u_2)^2 + 2(t_1-t_2)(u_1-u_2)\sqrt{-1}$$

wieder eine imaginäre Grösse. Heisse nun die auf die angegebene Weise abgeleitete Gleichung, wie a. a. O.

$$w^\mu + c_1 w^{\mu-1} + c_2 w^{\mu-2} + \ldots + c_\mu = 0,$$

wo $\mu = \frac{m(m-1)}{2}$ war, so suche man, wie es nun nach den Anweisungen des achten und neunten Abschnitts keine Schwierigkeit mehr hat, ihre reellen negativen Wurzeln. Nennen wir die *absoluten Werthe* derselben w_1 w_2, w_3, u. s. f., so sind diese, nach dem Obigen, Werthe von $4u^2$. Bildet man daher die Werthe

$$\frac{\sqrt{w_1}}{2},\ \frac{\sqrt{w_2}}{2},\ \frac{\sqrt{w_3}}{2},\ \text{u. s. w.},$$

so sind für die sämmtlichen imaginären Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ die reellen Coefficienten von $\sqrt{-1}$ in der Form $t+u\sqrt{-1}$ gefunden. Es bleibt nun noch t unbekannt. Um auch dieses zu bestimmen, substituiren wir $t+u\sqrt{-1}$ in

$$f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = 0,$$

entwickeln die Binomien und ordnen die Ergebnisse nach den fallenden Potenzen von t, so erhalten wir, indem sowohl der reelle als der imaginäre Theil der Entwickelung für sich $=0$ seyn muss, zwei Gleichungen der Form

$$t^m + U_1 t^{m-1} + U_2 t^{m-2} + \ldots + U_m = 0;$$

$$mt^{m-1} + U'_1 t^{m-2} + U'_2 t^{m-3} + \ldots + U'_{m-1} = 0;$$

in denen U_1, U_2,... U_m, so wie U'_1, U'_2,... U'_{m-1} Ausdrücke bedeuten, die von den Coefficienten a_1, a_2,... a_m der gegebenen Gleichung und von u und dessen Werthen abhängen. Setzen wir nun an die

Stelle des letztern der Reihe nach die Werthe $\frac{\sqrt{w_1}}{2}$, $\frac{\sqrt{w_2}}{2}$, $\frac{\sqrt{w_3}}{2}$ u. s. w., so enthalten die beiden vorste-henden Gleichungen nach Substitution jedes einzelne dieser Werthe immer nur noch eine einzige Unbe-kannte t. Sie müssen demnach jedesmal für eine und denselben Werth von t null werden; oder, wen wir diesen t_1 nennen, die linken Theile diese Gleichungen werden einen gemeinsamen Factor de Form $(t-t_1)$ haben müssen. Sucht man daher nac den bekannten Regeln zwischen den linken Theile der obigen Gleichungen jedesmal nach Substitutio von $u = \frac{\sqrt{w_1}}{2}, \frac{\sqrt{w_2}}{2}, \frac{\sqrt{w_3}}{2}$ u. s. f. den gemein-schaftlichen Theiler der Form $(t-t_1)$ auf und setz ihn $= 0$, so ergeben sich die beziehungsweise zuge-hörigen Werthe von t, und die imaginären Wurzel der Form $t + u\sqrt{-1}$ sind nun vollständig gefunden.

Hinsichtlich der Aufsuchung des gemeinsame Theilers aber ist zu bemerken, dass, da hier die Un-tersuchung, *ob* ein solcher statt findet, überflüssig ist es schon genügt, die Operation so weit zu verfolger bis man auf einen Rest kommt, der t nur noch in de ersten Potenz enthält.

§. 187.

Um diese Methode vollständig auf ein paar ein-fache Beispiele anzuwenden, sey

1) $\quad f(x) = x^3 + x - 10 = 0$

also

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6;$$

hieraus ergiebt sich das Schema

	f''',	f'',	f'	f	
(<0)	+	−	+	−	2 imag. Wurz.
(0)	+	0	+	−	
(>0)	+	+	+	−	
(1)	+	+	+	−	1 reelle Wurz.
(10)	+	+	+	+	

Um also die beiden bei 0 verloren gegangenen Wurzeln zu bestimmen, sind, da die Gleichung nach v vom Grade $\mu = \frac{3.\ 2}{1.\ 2} = 3$ ist, die Summen der 6 ersten Potenzen der Wurzeln von $f(x) = 0$ zu finden. Es ergiebt sich aber

$$S_1 = 0,\ S_2 = -2,\ S_3 = +30,\ S_4 = +2,$$
$$S_5 = -50,\ S_6 = +298.$$

Hieraus erhalten wir die Summen der drei ersten Potenzen der Differenzenquadrate der Wurzeln der vorgelegten Gleichung, wie folgt:

$$\Sigma_1 = -6,\ \Sigma_2 = +18,\ \Sigma_3 = -8166;$$

und hieraus endlich ergiebt sich als Gleichung nach w

$$w^3 + 6w^2 + 9w + 2704 = 0.$$

Bezeichnen wir sie abgekürzt durch $\Phi(w) = 0$, so ist

$$\Phi'(w) = 3w^2 + 12w + 9$$
$$\Phi''(w) = 6w + 12$$
$$\Phi'''(w) = 6.$$

Hieraus erhalten wir das Schema

	Φ''',	Φ'',	Φ',	Φ	
(-100)	+	−	+	−	1 reelle Wurz.
(-10)	+	−	+	+	
(<-1)	+	+	−	+	2 imag. Wurz.
(-1)	+	+	0	+	
(>-1)	+	+	+	+	

Es kommt also jetzt darauf an, die reelle negative Wurzel zwischen −10 und −100 zu finden. Die strenge Anwendung der Hauptregel in §. 172 nöthigt zur Zusammenziehung dieser Grenzen. Man findet zunächst, dass die Wurzel zwischen −10 und −20 liegt, und

indem man dem Gange der Regel Schritt vor Schrit
folgt, so zeigt sich endlich die Wurzel selbst $= -1$(
Dies führt nun weiter auf

$$\frac{\sqrt{w_1}}{2} = u_1 = \frac{4}{2} = 2.$$

Ferner giebt $x = t + u\sqrt{-1}$ in $f(x)$ substituirt

$$t^3 + 3t^2 u\sqrt{-1} - t(3u^2 - 1) + (u - u^3)\sqrt{-1} - 10;$$

welcher Ausdruck $= 0$ gesetzt die beiden Gleichunge

$$t^3 - t\,(3u^2 - 1) - 10 = 0,$$
$$3t^2 u + (u - u^3) = 0$$

giebt, welche für $u = u_1 = 2$ in

$$t^3 - 11t - 10 = 0,$$
$$t^2 - 1 \quad = 0$$

übergehen. Dividirt man den ersten der vorstehende beiden Ausdrücke zur Linken des Gleichheitszeicher durch den zweiten, so bleibt der Rest $10t + 10$, we cher, $= 0$ gesetzt, $t = t_1 = -1$ giebt. Demnach sin die beiden gesuchten imaginären Wurzeln

$$-1 + 2\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad -1 - 2\sqrt{-1}.$$

Sey 2)

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0,$$

also

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$
$$f''(x) = 6x$$
$$f'''(x) = 6;$$

daher folgendes Zeichenschema geltend:

	f''',	f'',	f',	f
(-1)	+	−	+	−
(<0)	+	−	−	−
(0)	+	0	−	−
(>0)	+	+	−	−
(1)	+	+	+	−
(10)	+	+	+	+

woraus zu ersehen, dass eine reelle Wurzel zwische 1 und 10 und 2 Wurzeln zwischen -1 und 0 liege

Nach §. 146 ergiebt sich $\frac{4}{1} + \frac{5}{2} > 1$, also sind die

beiden Wurzeln imaginär (vgl. §. 113). Die Gleichung der Differenzenquadrate ist bereits in §. 113 gefunden worden, nämlich

$$\Phi(w) = w^3 - 12w^2 + 36w + 643 = 0,$$

folglich

$$\Phi'(w) = 3w^2 - 24w + 36$$
$$\Phi''(w) = 6w - 24$$
$$\Phi'''(w) = 6.$$

Dies giebt folgendes Schema:

	Φ''',	Φ'',	Φ',	Φ
(—10)	+	—	+	—
(—1)	+	—	+	+
(0)	+	—	+	+
(1)	+	—	+	+
(10)	+	+	+	+

Es liegt also eine reelle negative Wurzel zwischen —1 und —10; die Zusammenziehung der Grenzen zeigt sodann, dass sie zwischen —5 und —6 enthalten ist, und die wirkliche Berechnung giebt endlich

$$w_1 = -5{,}1614377264934658,$$

woraus

$$u_1 = \frac{\sqrt{-w_1}}{2} = 2{,}27187978.$$

Die Substitution von $x = t + u\sqrt{-1}$ in $f(x) = 0$ giebt ferner

$$t^3 - (3u^2 + 2)t - 5 = 0,$$
$$3t^2 - u^2 - 2 = 0.$$

Die Aufsuchung des gemeinsamen Theilers dieser beiden Ausdrücke zur Linken von der Null führt auf einen Rest, der gleich Null gesetzt zur Gleichung

$$t = -\frac{4(u^2+2)(2u^2+1)}{45}$$

wird. Substituiren wir endlich hierin $u^2 = \frac{-w_1}{4}$, so kommt

$$t = t_1 = -\frac{(-w_1+8)(-w_1+2)}{90} = -1{,}047275740,$$

so dass also

$$t_1 \pm u_1\sqrt{-1} = -1{,}04727574 \pm 2{,}27187978.\ \sqrt{-1}.$$

Fourier hat diese auch schon von Newton, Lagrange und Cauchy als Beispiel benutzte Gleichung gebraucht, um seine Verbesserung der Newton'schen Näherungsmethode ausführlich daran zu erläutern, und daher die reelle Wurzel derselben bis auf 32 Decimalen berechnet. Bis auf die ersten acht ist diese Wurzel folgende:

$$2{,}09455148.$$

Addirt man hierzu die Summe der beiden imaginären Wurzeln, welche $= -2{,}09455148$, so kommt Null, wie es seyn muss, da in der Gleichung das zweite Glied fehlt. Eben so wird das Product aus den 3 Wurzeln 5 geben; womit also für die Richtigkeit der Wurzeln eine vollständige Controle geführt ist.

§. 188.

Der in §. 186 gegebenen Vorschrift liegt die Voraussetzung zum Grunde, dass die Gleichung der Differenzenquadrate durchgängig *ungleiche* negative Wurzeln hat. Dies findet aber nur so lange statt, als in der ursprünglichen Gleichung weder gleiche imaginäre Wurzelpaare vorkommen, noch zwei hinsichtlich des ersten Theils verschiedene Paare dieser Art hinsichtlich des zweiten, oder umgekehrt zwei hinsichtlich des zweiten Theils verschiedene imaginäre Wurzelpaare hinsichtlich des ersten Theils gleich sind, noch auch der erste Theil eines solchen Wurzelpaars einer reellen Wurzel derselben Gleichung gleich ist.

Denn denken wir 1) das Wurzelpaar $t_1 + u_1\sqrt{-1}$, $t_1 - u_1\sqrt{-1}$ wiederholt, so ergeben sich die sechs Differenzenquadrate

$$-4u_1^2,\ 0,\ -4u_1^2,\ -4u_1^2,\ -4u_1^2,\ 0,$$

also vier gleiche negative Wurzeln der Gleichung nach z.

Sey 2) das eine Paar $t_1 \pm u_1\sqrt{-1}$, das andre $t_1 \pm u_2\sqrt{-1}$, so sind die Differenzenquadrate jetzt folgende:

$$-4u_1^2,\ -(u_1-u_2)^2,\ -(u_1+u_2)^2,\ -(u_1+u_2)^2,$$
$$-(u_1-u_2)^2,\ -4u_2^2,$$

also drei Paare gleicher negativer Wurzeln der Gleichung nach w.

Sey 3) das eine Paar $t_1 \pm u_1\sqrt{-1}$, das andre $t_2 \pm u_1\sqrt{-1}$, so ergeben sich die Differenzenquadrate

$$-4u_1^2,\ (t_1-t_2)^2,\ (t_1-t_2+2u_1\sqrt{-1})^2,\ (t_1-t_2)^2,$$
$$(t_1-t_2-2u_1\sqrt{-1})^2,\ -4u_1^2,$$

also ein Paar gleicher reeller negativer Wurzeln der Gleichung nach w.

4) endlich sey das imaginäre Paar $t_1 \pm u_1\sqrt{-1}$ und ausserdem eine reelle Wurzel $=t_1$ gegeben, so entstehen aus diesen dreien die Differenzenquadrate

$$-4u_1^2,\ -u_1^2,\ -u_1^2,$$

also ein Paar gleicher negativer Wurzeln.

In allen diesen Fällen nun, in denen sich zwei, drei, vier oder mehrere gleiche Wurzeln der Gleichung nach w finden, würde das Verfahren in §. 186 ohne Unterschied immer nur mehrfache gleiche imaginäre Wurzeln für die ursprüngliche Gleichung geben. Denn da bei der Aufsuchung des gemeinsamen Theilers zwischen den beiden Gleichungen nach t mit der Division so lange fortgefahren wurde, bis man auf einen Rest kam, der t nur noch in der ersten Potenz enthielt, so kann die Gleichsetzung dieses Restes mit Null nur Einen Werth für t geben, der dann zu jedem Werth von $u = \frac{\sqrt{w}}{2}$ in der Form $t + u\sqrt{-1}$ hinzuzufügen wäre. Das Unzureichende und Fehlerhafte dieses Verfahrens leuchtet aus den vorstehenden Unterscheidungen ein, und es dient daher Folgendes zur Ergänzung. So oft die Gleichung nach w mehrere gleiche reelle negative Wurzeln enthält, aus denen sich also ein mehrfaches $u = \frac{\sqrt{w}}{2}$ ergiebt, hat man zuerst zu versuchen, ob nicht jedem dieser Werthe ein besonderes t zugehört.

Dies geschieht dadurch, dass man nach Substitution von $u = \frac{\sqrt{w}}{2}$ in den beiden Gleichungen, deren gemeinschaftlicher Theiler t giebt, die Division der einen durch die andre nur bis zu einem Reste verfolgt, in dem t noch mit einem Exponenten vorkommt, der der Anzahl der gleichen Werthe von u gleich ist. Dieser Rest ist also in Beziehung auf t vom 2ten, 3ten, 4ten Grade u. s. f., je nachdem die Zahl der gleichen Werthe von u beziehlich 2, 3, 4 u. s. w. ist. Setzt man ihn nun gleich Null, so entsteht eine Gleichung vom 2ten, 3ten oder 4ten Grade u. s. w. Die Wurzeln dieser Gleichungen können nun wieder entweder sämmtlich reell oder zum Theil imaginär seyn. Im ersteren Falle hat man eben so viele zu dem wiederholten Einen Werthe von u zugehörige t; in dem andern Falle sind nur die reellen Wurzeln als brauchbare Werthe von t anzusehen, da, nach der Voraussetzung, in der Form $t+u\sqrt{-1}$, t und u immer reelle Grössen sind.

§. 189.

Um auch diese Fälle durch ein Beispiel zu erläutern, sey

$$f(x)=x^4-4x^3+11x^2-14x+10=0;$$

so ergiebt sich hieraus das Schema

	f^{IV},	f''',	f'',	f',	f
(0)	+	−	+	−	+
(<1)	+	−	+	−	+
(1)	+	0	+	0	+
(>1)	+	+	+	+	+

Es sind also zwischen <1 und >1, oder bei 1, zwei Paare imaginärer Wurzeln angezeigt.

Als Gleichung der Differenzenquadrate ergiebt sich

$$\Phi(w)=w^6+40w^5+582w^4+3820w^3+11233w^2+$$
$$+13140w+5184=0,$$

aus der man folgendes Schema erhält:

	Φ^{VI},	Φ^{V},	Φ^{IV},	Φ''',	Φ'',	Φ',	Φ
(—100)	+	—	+	—	+	—	+
(—10)	+	—	+	+	—	+	—
(<—1)	+	+	+	+	+	—	+
(—1)	+	+	+	+	+	0	0
(>—1)	+	+	+	+	+	+	+

Es liegen also: eine Wurzel zwischen —100 und —10, drei zwischen —10 und —1, zwei gleiche reelle bei —1, so dass also —1 eine zweifache Wurzel der Gleichung ist. Die engere Zusammenziehung der Grenzen zeigt ferner, dass die erste Wurzel zwischen —20 und —10 zu suchen ist, und die Anwendung der Näherungsmethode ergiebt endlich, dass in diesem Intervall die Wurzel —16 liegt. Durch dieselbe Methode findet man die zweifache Wurzel —9, endlich die einfache —4. Es sind also sämmtliche Wurzeln der Gleichung nach w reell und negativ, sie sind nämlich der Reihe nach

$$-16, -9, -9, -4, -1, -1.$$

Hieraus folgen nun die vier Werthe

$$u_1 = 2, \; u_2 = \frac{3}{2}, \; u_3 = 1, \; u_4 = \frac{1}{2}.$$

Setzen wir jetzt $x = t + u\sqrt{-1}$ in $f(x)$, so entwickeln sich hieraus die beiden Gleichungen

$$t^4 - 4t^3 - (6u^2 - 11)t^2 + 2(6u^2 - 7)t + u^4 - 11u^2 + 10 = 0;$$

$$2u\left\{2t^3 - 6t^2 - t(2u^2 - 11) + 2u^2 - 7\right\} = 0.$$

Zuerst geht nun der linke Theil derselben durch Substitution von $u = u_1 = 2$, wenn wir bei der zweiten den gemeinsamen Factor $2u$ hinweglassen, über in

$$2t^4 - 8t^3 - 26t^2 + 68t - 36;$$

$$2t^3 - 6t^2 + 3t + 1.$$

Dividirt man erstere durch letztere, so kommt man auf den Rest $-35(t^2 + 2t - 1)$; dividirt man dann nach Absonderung des Factors —35 in den zweiten der vorstehenden Ausdrücke, so bleibt der Rest $-3t + 3$, der also $= 0$ zu setzen ist und dann

$$t = t_1 = 1$$

giebt. Substituiren wir

2) $u = u_2 = \frac{3}{2}$, so geht aus den obigen Glei-chungen hervor

$$16t^4 - 64t^3 - 40t^2 + 208t - 155;$$
$$4t^3 - 12t^2 + 13t - 5.$$

Da $\frac{3}{2}$ aus einer doppelten Wurzel 3 der Gleichung nach w entstanden ist, so muss man bei Aufsuchung des gemeinsamen Theilers bei einem Reste vom 2ten Grade stehen bleiben. Es findet sich

$$-140t^2 + 280t - 175.$$

Dies gleich Null gesetzt giebt

$$t = t_2 = 1 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-1},$$

also einen imaginären Werth; folglich entstehen aus den beiden gleichen Wurzeln 9;9 der Gleichung nach w keine imaginären der ursprünglichen nach x. Setzen wir

3) $u = u_3 = 1$, so erhalten wir die beiden Ausdrücke

$$t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 2t;$$
$$2t^3 - 6t^2 + 9t - 5.$$

Die Division bis auf einen Rest des ersten Grades fortgesetzt giebt als solchen $3t - 3$, woraus also

$$t = t_3 = 1.$$

4) Substituiren wir endlich $u = u_4 = \frac{1}{2}$, so ergeben sich die Ausdrücke

$$16t^4 - 64t^3 + 152t^2 - 176t + 117;$$
$$4t^3 - 12t^2 + 21t - 13.$$

Die Division derselben durch einander ist nur bis zu einem Rest vom zweiten Grade fortzuführen. Als solcher findet sich

$$20t^2 - 40t + 65.$$

Gleich Null gesetzt giebt er

$$t = t_4 = 1 \pm \tfrac{3}{2}\sqrt{-1},$$

also einen imaginären Werth; folglich entstehen auch aus den beiden gleichen Wurzeln $-1;-1$ der Gleichung nach w keine imaginären der ursprünglichen $f(x) = 0$.

Die zwei bei 1 angezeigten imaginären Wurzelpaare der vorgelegten Gleichung sind also nach 1) und 3)

$$1 \pm 2\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad 1 \pm \sqrt{-1}.$$

§. 190.

Obgleich die in den nächstvorhergehenden §§. entwickelte Methode sowohl in der Hauptsache theoretische Befriedigung gewährt als auch bei der praktischen Ausübung immer durch directe Rechnungen zum Ziele gelangt, so scheint sie doch, in Vergleichung mit dem einfachen Gange, den die Newtonisch-Fourier'sche Näherungsmethode zur Berechnung der reellen Wurzeln nimmt, nicht ohne Umwege und Weitläufigkeiten ihr Problem zu lösen. Da es nämlich, wie wir im achten Abschnitt gesehen haben, Fourier gelungen ist, Behufs der Unterscheidung der reellen von den imaginären Wurzeln, die Gleichung der Differenzenquadrate völlig entbehrlich zu machen und an deren Stelle einfache, aus Betrachtung der Figur abgeleitete Kriterien zu setzen, so liegt die Frage nahe, ob es nicht auch bei Berechnung der imaginären Wurzeln möglich sey, sich der mühsamen Bildung jener Gleichung zu überheben. Nun hat zwar Legendre*) eine von der vorstehenden gänzlich verschiedene und daher auch von der Gleichung der Differenzenquadrate unabhängige Methode gegeben, die er als allgemein und praktikabel bezeichnet; allein diese lehrt nur, wie irgend eine Wurzel der Form $t+u\sqrt{-1}$, in der aber auch $u=0$ seyn kann, also irgend eine reelle oder imaginäre Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ sich finden lässt. Diese Methode konnte daher, wie es in der That der Fall ist, von Legendre und mit einigen Modificationen von Cauchy (vgl. §§. 72—74) benutzt werden, um den Beweis zu führen, dass jede Gleichung $f(x)=0$ eine Wurzel der Form $t+u\sqrt{-1}$ habe; sie lehrt aber nicht, wie ein bestimmtes aus sichern Kriterien er-

---

*) *Théorie des nombres, Ière Partie nr.* 119.

kanntes imaginäres Wurzelpaar sich berechnen lässt. Noch weniger aber können andre auf blossen Versuchen beruhende Methoden*) befriedigen. Es eröffnet sich also hier ein neuer Raum für fernere Entdeckungen, deren Gelingen erst erwartet werden muss**). Indessen wollen wir in den folgenden §§. versuchen, einem einfachen und nahe liegenden hierher gehörigen Gedanken einige Entwickelung zu geben.

§. 191.

Wir haben in gegenwärtiger Schrift die imaginären Wurzeln in einer doppelten Beziehung zur figürlichen Darstellung der gegebenen Gleichung kennen gelernt: einmal nämlich als verloren gegangene und noch erkennbare Durchschnitte der Curve $y = f(x)$ mit der Abscissenaxe, sodann als die wirklichen Durchschnitte der in §. 80 ff. mit $\chi(t,u) = 0$ und $\frac{\psi(t,u)}{u} = 0$ bezeichneten Curven. Was die erste Ansicht betrifft, so kann man, wie nach Fourier gezeigt worden ist, immer die sämmtlichen Abscissen, deren Ordinaten solche Puncte der Curve bezeichnen, in welchen Durchschnitte verloren gingen, entweder unmittelbar nachweisen oder doch in Grenzen einschliessen. Man würde sich aber irren, wenn man etwa vermuthen wollte, dass diese Coordinaten mit den reellen Werthen t,u der imaginären Wurzel $t + u\sqrt{-1}$, welche allerdings auch rechtwinklige Coordinaten darstellen, übereinstimmten oder auch nur in nahe liegender Beziehung ständen. Denn habe die Gleichung $f(x) = 0$ das imaginäre Wurzelpaar $x = t \pm u\sqrt{-1}$, so können wir setzen

*) S. z. B. Legendre a. a. O. nr. 118.

**) Dass die Anwendung der recurrirenden Reihen eine directe Methode zur Auffindung der reellen Werthe in den imaginären Wurzeln an die Hand giebt, ist aus Fourier's oft genanntem Werke (*exposé synoptique p.* 74) bekannt; die obige Bemerkung trifft daher nur die Frage, ob durch einfachere und näher liegende (vielleicht der Betrachtung der Figur entnommene) Hülfsmittel sich etwas Aehnliches leisten lässt.

$$f(x) = \varphi(x)\,[(x-t)^2 + u^2]$$

woraus

$$f^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}[(x-t)^2 + u^2] + 2n\,(x-t)\,\varphi^{(n-1)}(x) + n(n-1)\,\varphi^{(n-2)}(x).$$

Dieser Ausdruck wird nur unter besonderen Bedingungen für $x=t$ null, z. B. wenn $\varphi(x) = c + (x-t)^m$, wo c eine beliebige Constante und $m > n$ ist. Also keineswegs allgemein macht die Substitution von $x=t$ eine der derivirten Functionen verschwinden, was doch, nach de Gua's Satze, das erste Merkmal imaginärer Wurzeln war. Immer aber wird das Vorhandenseyn imaginärer Wurzeln durch das Verschwinden von solchen abgeleiteten Functionen angezeigt. Also müssen in allen den Fällen, in welchen $\varphi(x)$ nicht eine solche besondere Form hat, andere Werthe als t das Verschwinden einer mittleren Function und die gleichen Zeichen der nicht verschwindenden nächst benachbarten bewirken.

Um dies ausführlich durch ein Beispiel zu erläutern, wählen wir die schon in §. 78 benutzte Gleichung

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 10 = 0,$$

für die sich

$$\chi(t,u) = u^4 - (6t^2 - 2)u^2 + (t^4 - 2t^2 + 3t + 10) = 0,$$

$$\frac{\psi(t,u)}{u} = 4tu^2 - (4t^3 - 4t + 3) = 0$$

ergeben. Bezeichnen wir zur Unterscheidung die Ordinaten der zweiten Curve durch u', so entsteht folgende Tabelle, nach welcher, was die beiden Curven χ und $\frac{\psi}{u}$ betrifft, die Fig. 29 construirt ist*).

---

*) Wir erinnern hierbei wiederholt, dass die positiven Abscissen hier auf den linken Theil der t-Axe aufgetragen sind. Hätte man dies, wie gewöhnlich, auf der rechten Seite gethan, so würde die Figur so aussehen, wie sie sich jetzt umgekehrt darstellt.

t	u		u'	$f(t)$
-5	$\pm 12,00$	$\pm 1,99$	$+4,88$	$+570$
-4	$\pm 9,57$	$\pm 1,56$	$\pm 3,85$	$+222$
-3	$\pm 7,12$	$\pm 1,12$	$\pm 2,78$	$+64$
-2	$\pm 4,63$	$\pm 0,74$	$\pm 1,62$	$+12$
$-1\frac{1}{2}$	$\pm 3,32$	$\pm 0,67$	$\pm 0,78$	$+6,06$
-1	$\pm\sqrt{2+\sqrt{-2}}$	$\pm\sqrt{2-\sqrt{-2}}$	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$	$+6$
0	imaginär		$\pm\infty$	$+10$
$+\frac{1}{100}$	imaginär		$\pm 8,60$	....
$+\frac{1}{8}$	imaginär		$\pm 2,24$	....
$+\frac{1}{4}$	imaginär		$\pm 1,44$	....
$+\frac{1}{2}$	imaginär		$\pm 0,87$	....
$+1$	$\pm\sqrt{-2+2\sqrt{-2}}$	$\pm\sqrt{-2-2\sqrt{-2}}$	$\pm 0,87$	$+12$
$+1\frac{1}{2}$	$\pm 3,16$	$\pm 1,22$	$\pm 1,32$	$+15,06$
$+2$	$\pm 4,56$	$\pm 1,07$	$\pm 1,84$	$+24$
$+3$	$\pm 7,09$	$\pm 1,26$	$\pm 2,87$	$+92$
$+4$	$\pm 9,55$	$\pm 1,67$	$\pm 3,90$	$+246$
$+5$	$\pm 11,99$	$\pm 2,04$	$\pm 4,91$	$+600$

Hier liegt nun offenbar ein Durchschnitt der Curven χ und $\frac{\psi}{u}$ zwischen den Abscissen -1 und $-1\frac{1}{2}$. Denn in diesem Intervall gehen die Doppelwerthe von u, die für $-1\frac{1}{2}$, $\pm 3,32$ und $0,67$ sind, in einander über (für $t=-1,1$ sind sie bereits einander so nahe gerückt, dass der eine $=\pm 1,93$, der andre $=\pm 1,24$ ist), indem der irrationale Theil der für u aufgelösten Gleichung $\chi(t,u)=0$ null wird, wenn

$$t^4 - 2t^2 + 3t + 10 = 0.$$

In demselben Intervall aber nimmt u' von $\pm 0,78$ bis auf 0 ab; es wird hier also sicher einen gleichen Werth von u finden. Aus gleichen Gründen erhellt, dass der andre Durchschnitt zwischen $+1$ und $+1\frac{1}{4}$ liegt. Die ersten Theile der imaginären Wurzeln dieser Gleichung liegen also zwischen $-1\frac{1}{2}$ und -1, und zwischen $+1$ und $+1\frac{1}{2}$. Dagegen gab die Behandlung derselben Gleichung in §. 154,4 zu erkennen, dass

zwischen 0 und 1 einerseits und —1 und —2 andrerseits ein Wurzelpaar verloren gegangen ist, so dass nur das letztere Intervall im Allgemeinen mit dem übereinstimmt, in welchem der erste Theil eines Paares der imaginären Wurzeln enthalten ist.

Im Beispiel des §. 189 hingegen finden wir die verloren gegangenen Wurzeln an derselben Stelle angezeigt, deren Abscisse $x = t = 1$ ist. Diese Uebereinstimmung ist nicht zufällig. Es ist nämlich, wie aus den gefundenen imaginären Wurzeln $1 \pm 2\sqrt{-1}$ und $1 \pm \sqrt{-1}$ folgt,

$$x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10 = [(x-1)^2 + 4][(x-1)^2 + 1];$$

also wenn wir einen von diesen quadratischen Factoren $= \varphi(x)$ setzen, $\varphi(x)$ von der Form $c + (x-t)^m$, folglich, nach dem, was zu Anfange dieses §. gezeigt worden ist, die bemerkte Uebereinstimmung nothwendig.

§. 192.

Es ist nicht wahrscheinlich, dass die Ansicht von den imaginären Wurzeln als verloren gegangenen Durchschnitten, diesem ihrem geometrischen Ausdrucke nach, wie er zuerst in §. 125 ff. vorgekommen ist, für die wirkliche Berechnung derselben Hülfsmittel an die Hand geben sollte, da hierbei die Form $t + u\sqrt{-1}$ ganz ausser Berücksichtigung bleibt. Ganz anders verhält es sich mit der zweiten Ansicht, welche t und u als Coordinaten der Durchschnitte der Curven χ und $\frac{\psi}{u}$ betrachten lehrt. Hierbei ist nur von wirklichen Durchschnitten, also auch nur von reellen Wurzeln die Rede; aber das Problem, mit dem man sich eigentlich beschäftigt, wird erweitert. Anstatt nämlich bei der Curve $y = f(x)$ stehen zu bleiben, und ihre Durchschnitte mit der Abscissenaxe, d. i. mit der geraden Linie, deren Gleichung $y = 0$, aufzusuchen, erhebt sich die Betrachtung zu den krummen

Flächen, auf denen jene parabolische Curve und diese Gerade liegen, und aus denen sie durch ebene Schnitte hervorgehen. Diese Flächen sind die schon aus §. 75 ff. bekannten

$$z = \chi(t,u) = f(t) - \frac{u^2}{2} f''(t) + \frac{u^4}{2.3.4} f^{IV}(t) - \ldots$$

$$z' = \psi(t,u) = uf'(t) - \frac{u^3}{2.3} f'''(t) + \frac{u^5}{2\ldots5} f^{V}(t) - \ldots$$

Setzt man in beiden $u=0$, d. i. schneidet man sie durch die tz-Ebene, so gehen sie beziehlich über in

$$z = f(t) \quad \text{und} \quad z' = 0,$$

Gleichungen, von denen die erste mit der vorgelegten Gleichung $y = f(x)$ und der ihr entsprechenden parabolischen Curve, die andre aber mit $y = 0$, der Gleichung der Abscissenaxe übereinstimmt. Zwischen beiden Gleichungen z eliminiren heisst nun die reellen Wurzeln der vorgelegten Gleichung aufsuchen, die hier also als die gemeinsamen Puncte der beiden krummen Flächen und der tz-Ebene erscheinen und, wegen $z=0$, zugleich in der tu-Ebene liegen. Man kann aber auch statt dessen zuerst für beide Flächen $z=0$ setzen, d. i. dieselben durch die tu-Ebene schneiden, wodurch die Curven $\chi = 0$ und $\psi = 0$ erhalten werden, dann zwischen diesen t und u eliminiren, d. i. ihre Durchschnitte bestimmen. Da $u=0$ die Gleichung $\psi(t,u)=0$ verificirt, so reducirt sich durch Substitution dieses Werthes die Gleichung $\chi(t,u)=0$ auf $f(t)=0$, und es fallen daher die Durchschnitte der Curve $\chi(t,u)=0$ mit der Abscissenaxe zusammen mit denen der Curve $z=f(t)$ mit der Abscissenaxe. Allein durch diese Substitution ist die Elimination zwischen den Gleichungen $\chi=0$ und $\psi=0$ im Allgemeinen noch nicht vollständig ausgeführt; es ergeben sich vielmehr noch andre Durchschnittspuncte, nämlich die der Curven $\chi = 0$ und $\frac{\psi}{u} = 0$. Die vollständige Elimination zwischen den Gleichungen $\chi(t,u)=0$ und $\psi(t,u)=0$ lehrt daher die

Puncte finden, welche die beiden krummen Flächen und die tu-Ebene gemein haben; dagegen bestimmen die reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ die Puncte, welche die beiden krummen Flächen mit der tz-Ebene gemein haben. Da der Fläche z' nur eine Gerade, nämlich die t-Axe mit der tz-Ebene gemein ist, so liegen alle diese Puncte in der t-Axe, folglich zugleich in der tu-Ebene; also sind diese Puncte unter denen enthalten, welche allgemein den beiden Flächen mit der tu-Ebene gemein sind; die Untersuchung über die Coordinaten dieser Puncte ist demnach die allgemeinere.

Es mag hier nicht unbemerkt bleiben, da es für die geometrische Deutung der imaginären Grössen überhaupt von Wichtigkeit erscheint, obgleich hier als zu entfernt liegend nicht weiter ausgeführt werden kann, dass aus Vorstehendem deutlich erhellt, dass die der Gleichung $y=f(x)$ entsprechende parabolische Curve und die hyperbolischen Curven, welche durch Construction der Gleichungen $\chi(t,u)=0$ und $\psi(t,u)=0$ erhalten werden, *nicht in einer und derselben Ebene, sondern in zwei auf einander senkrechten Ebenen, deren Durchschnitt die Abscissenaxe ist, liegen, und sich die Grössen* t, u *und* y (*letzteres mit* z *zusammenfallend*) *so construirt finden, als ob in dem Ausdrucke* $\mathrm{t}+\mathrm{u}\sqrt{-1}$ *das Symbol* $\sqrt{-1}$ *die Weisung enthielte, aus der Ebene der* xy (*oder* tz) *herauszugehen und in der darauf senkrechten Ebene das in dasselbe multiplicirte* u *als zu* t *gehörige Ordinate zu construiren*, eine Deutung, die aus allgemeinen Gründen den imaginären Formen zu geben bereits längst versucht worden ist, ohne bis jetzt sonderliche Beachtung gefunden zu haben*).

---

*) S. die Vorrede.

§. 193.

Alles kommt jetzt darauf an, die sämmtlichen Werthe zu finden, welche den beiden Gleichungen $\chi(t,u)=0$ und $\frac{\psi(t,u)}{u}=0$ zugleich Genüge leisten. Legt man hierbei die trigonometrischen Formen derselben, wie sie in §. 72 ff. benutzt worden sind, zum Grunde, so kann die Auffindung solcher Werthe nur durch Versuche erreicht werden. Nehmen wir dagegen die im vorhergehenden §. wiederholten nach den Potenzen von u geordneten Entwickelungen, so können wir durch directe Operationen zur Lösung dieser Aufgabe gelangen. Ordnen wir dieselben zuerst nach den fallenden Potenzen, so ist zu unterscheiden, ob m gerade oder ungerade ist. Setzen wir dabei zur Abkürzung

$$\frac{f^{(k)}(t)}{1.2\ldots k}=f_k,$$

so ist, wenn m *gerade*,

$$\chi(t,u)=u^m-u^{m-2}f_{m-2}+u^{m-4}f_{m-4}-\ldots.$$

$$\ldots.+(-1)^{\frac{m}{2}-2}u^4f_4+(-1)^{\frac{m}{2}-1}u^2f_2+(-1)^{\frac{m}{2}}f=0;$$

$$\frac{\psi(t,u)}{u}=u^{m-2}f_{m-1}-u^{m-4}f_{m-3}+u^{m-6}f_{m-5}-\ldots.$$

$$\ldots.+(-1)^{\frac{m}{2}-3}u^4f_5+(-1)^{\frac{m}{2}-2}u^2f_3+(-1)^{\frac{m}{2}-1}f_1=0.$$

Ist dagegen m *ungerade*, so hat man

$$\chi(t,u)=u^{m-1}f_{m-1}-u^{m-3}f_{m-3}+u^{m-5}f_{m-5}-\ldots.$$

$$+(-1)^{\frac{m-1}{2}-2}u^4f_4+(-1)^{\frac{m-1}{2}-1}u^2f_2+(-1)^{\frac{m-1}{2}}f=0;$$

$$\frac{\psi(t,u)}{u}=u^{m-1}-u^{m-3}f_{m-2}+u^{m-5}f_{m-4}-\ldots.$$

$$+(-1)^{\frac{m-1}{2}-2}u^4f_5+(-1)^{\frac{m-1}{2}-1}u^2f_3+(-1)^{\frac{m-1}{2}}f_1=0.$$

In beiden Fällen enthalten also beide Gleichungen nur gerade Potenzen von u, wie schon am Ende von §. 80 bemerkt und benutzt worden ist, und es liegen also die beiden Curven immer symmetrisch gegen die Abscissenaxe; aber für ein gerades m sind sie von ungleichem, für ein ungerades m von gleichem Grade, und hiernach die Anzahl ihrer Aeste gleich oder verschieden. Um nun die zusammengehörigen reellen Werthe von t und u zu finden, die beiden Gleichungen zugleich Genüge leisten, kann man, ohne zu berücksichtigen, ob m gerade oder ungerade ist, so verfahren. Da zu jedem Werthe von t immer zwei gleiche und entgegengesetzte von u gehören, so werden die beiden Functionen $\chi(t,u)$ und $\frac{\psi(t,u)}{u}$ einen gemeinschaftlichen Factor der Form

$$Pu^2 - F(t)$$

enthalten, wo P und $F(t)$ ganze rationale Functionen von t sind. Um diesen Factor zu finden, wird man nach der gewöhnlichen Weise zwischen den Ausdrükken $\chi(t,u)$ und $\frac{\psi(t,u)}{u}$ den grössten gemeinschaftlichen Theiler suchen, indem man die Division dabei so weit fortsetzt, bis man auf einen Rest kommt, der *nur noch* t, also *nicht mehr* u enthält und der $\Phi(t)$ heissen mag, womit also ebenfalls eine ganze rationale Function von t bezeichnet ist. Da nun $Pu^2 - F(t)$ der gemeinschaftliche Theiler, so ist dieser Rest

$$\Phi(t) = 0.$$

Sucht man die reellen Wurzeln dieser Gleichung, substituirt sie der Reihe nach in dem letzten Divisor, der also $= Pu^2 - F(t)$, setzt diesen Ausdruck $= 0$ und löst die hierdurch entstehende Gleichung für u auf, so erhält man offenbar die zusammengehörigen Werthe von t und u und damit die sämmtlichen Wurzeln der Form $t + u\sqrt{-1}$.

Statt dieses letztern Verfahrens könnte man auch die reellen Wurzeln der Gleichung $\Phi(t)=0$ unmittelbar in $\chi(t,u)=0$ und $\frac{\psi(t,u)}{u}=0$ substituiren und zwischen den linken Theilen dieser Gleichungen, die dann als ganze rationale Functionen von u erscheinen, die gemeinschaftlichen Theiler der Form $u^2-u_1^2$, $u^2-u_2^2$, u. s. w. suchen; offenbar aber wäre dies Verfahren weitläufiger als das erstere.

Hat die Gleichung $\Phi(t)=0$ mehrere gleiche reelle Wurzeln, so können denselben entweder gleiche oder verschiedene Werthpaare von u entsprechen. Um zu entscheiden, welches von beiden der Fall ist, wird man den gleichen Werth von t nicht in dem letzten Divisor, der u nur in der zweiten Potenz enthält, zu substituiren haben, sondern, je nachdem die Zahl der gleichen Wurzeln 2, 3, 4 u. s. f., beziehlich in dem vorletzten, drittletzten, viertletzten u. s. w. Divisor, der also u beziehungsweise bis zur 4ten, 6ten, 8ten Potenz enthalten wird. Diese Ausdrücke sind dann gleich Null zu setzen und die so entstandenen Gleichungen vom 4ten, 6ten, 8ten Grade u. s. f. zu lösen. Sind dann sämmtliche Wurzeln reell, so entsprechen den gleichen Werthen von t verschiedene Werthpaare von u. Sind aber unter ihnen imaginäre, so müssen sie, der Voraussetzung gemäss, übergangen werden. In diesem Falle wird die ursprüngliche Gleichung $f(x)=0$ mehrfache imaginäre Wurzelpaare, nämlich von der Form $(t\pm u\sqrt{-1})^2$, $(t\pm u\sqrt{-1})^3$ u. s. f. enthalten.

Auf diese Weise ist die Berechnung der imaginären Wurzeln einer vorgelegten Gleichung $f(x)=0$ auf die Berechnung der reellen Wurzeln einer Hülfsgleichung $\Phi(t)=0$ zurückgeführt. Das angegebene Verfahren liesse sich nun allerdings ganz im Allgemeinen auf die gegebenen Ausdrücke für $\chi(t,u)$ und

$\frac{\psi(t,u)}{u}$ anwenden, und dadurch die Function $\Phi(t)$ ganz allgemein bestimmen; allein dies würde zu Ergebnissen von nicht leicht zu übersehender Regelmässigkeit und geringer praktischer Brauchbarkeit führen. Wir ziehen es daher vor, bei der allgemeinen Beschreibung dieses Verfahrens stehen zu bleiben und dasselbe noch durch ein Paar Beispiele zu erläutern.

§. 194.

Wir wählen 1) wieder die Gleichung in §. 191

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 10 = 0,$$

für welche

$$\chi(t,u) = u^4 - (6t^2 - 2)u^2 + (t^4 - 2t^2 + 3t + 10),$$

$$\frac{\psi(t,u)}{u} = 4tu^2 - (4t^3 - 4t + 3)$$

war. Dividirt man den einen dieser Ausdrücke durch den andern, so kommt man endlich auf den Rest

$$-64t^6 + 64t^4 + 144t^2 + 9.$$

Setzt man denselben $= 0$, multiplicirt mit -1, und setzt zur Abkürzung $4t^2 = \tau$, so kommt

$$\Phi(\tau) = \tau^3 - 4\tau^2 - 36\tau - 9 = 0.$$

Bildet man hiervon die Derivationen und untersucht zwischen den Grenzen der Wurzeln ihre Zeichen, so erhält man folgendes Schema:

	Φ''',	Φ'',	Φ',	Φ	
(—5)	+	—	+	—	1 reelle W.
(—4)	+	—	+	+	1 reelle W.
(0)	+	—	—	—	
(8)	+	+	+	—	1 reelle W.
(9)	+	+	+	+	

Nur diese letzte Wurzel ist zu berechnen, da die negativen Werthe von τ offenbar für t imaginäre geben würden, was gegen die Voraussetzung ist. Es findet sich

$$\tau = 8{,}408613813\ldots,$$

daher

$$t = \pm\, 1{,}44988\ldots$$

Substituirt man diese beiden Werthe in den Divisor $4tu^2 - (4t^3 - 4t + 3)$, und setzt diesen dann gleich Null, so kommt

$$u = \pm 1{,}241\ldots \quad \text{und} \quad u = \pm 0{,}765\ldots$$

Die beiden imaginären Wurzelpaare sind also

$$1{,}44988 \pm 1{,}241.\sqrt{-1} \text{ und } -1{,}44988 \pm 0{,}765.\sqrt{-1}.$$

Da man die Quadrate von u bis auf fünf Stellen genau hat, nämlich 1,61943 und 0,58487, so kann man diese zur schärfern Controle der gefundenen Wurzeln benutzen. Bildet man nämlich das Product aus diesen vier Wurzeln, welches von der Form $(t_1^2 + u_1^2)(t_2^2 + u_2^2)$ ist, wo t_1, u_1, t_2 und u_2 die obigen Werthe von t und u sind, so findet es sich $= 9{,}99996$, also nur um 0,00004 verschieden vom letzten Gliede 10 der Gleichung $f(x) = 0$. Hiermit bestätigt sich also die genäherte Richtigkeit der berechneten Wurzeln.

Sey 2), wie in §. 186,

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0,$$

so ist

$$\chi(t,u) = 3tu^2 - (t^3 - 2t - 5);$$

$$\frac{\psi(t,u)}{u} = u^2 - (3t^2 + 2).$$

Die Division beider Ausdrücke lässt den von u unabhängigen Rest

$$8t^3 - 4t + 5,$$

der, wenn wir in ihm $2t = \tau$ und ihn selbst $= 0$ setzen, die Gleichung

$$\Phi(\tau) = \tau^3 - 2\tau + 5 = 0$$

giebt. Hieraus entsteht das Zeichenschema

	Φ''',	Φ'',	Φ',	Φ.	
(−3)	+	−	+	−	1 reelle W.
(−2)	+	−	+	+	
(<0)	+	−	−	+	
(0)	+	0	−	+	
(>0)	+	+	−	+	2 Wurzeln.
(1)	+	+	+	+	

Dass letztere Wurzeln imaginär, folgt nach §. 146 daraus, dass $\frac{4}{1}+\frac{5}{2}>1$. Wir haben daher nur die reelle Wurzel zwischen —3 und —2 zu berechnen. Geschieht dies, so findet sich

$$\tau = -2{,}09455148,$$

folglich $t = -1{,}04727574$.

Die Substitution dieses Werthes in $u^2-(3t^2+2)=0$ endlich giebt

$$u = \pm\, 2{,}2719\ldots$$

wie in §. 187.

Leipzig,
gedruckt bei J. B. Hirschfeld.

Druckfehler und Verbesserungen.

S. 4. Z. 6. v. o. lies $a_0 x^m$ statt $a_0 x^{m-1}$.

— 8. — 1. v. u. — $a_{n+2} x^{n+2}$ statt $a^{n+2} x_{n+2}$.

— 13. — 6. v. o. — fallen st. steigen.

— 14. — 15. v. o. — $aq^3 x^{\beta+2l}$ statt $aq^3 x^{\beta+2-l}$.

— 22. — 14. v. o. — $a\omega^\alpha$ statt ω^α.

— 23. — 2. v. u. — $\frac{a}{\omega^\mu}$ statt $\frac{x}{\omega^\mu}$.

— 25. — 11. v. o. — $\frac{1}{\omega^{\alpha'-\alpha}}$ statt $\frac{1}{\alpha'-\alpha}$

— 26. — 10. v. o. — §. 26. statt §. 25.

— 31. — 7. v. u. — n statt $n-1$.

— 32. — 11. v. u. — $\varDelta^2 y_3$ statt $\varDelta^2 y_2$.

— 33. — 5. v. o. — $\varDelta^n y_k$ statt $\varDelta^n y$.

— 36. — 11. v. u. — $\frac{d^3 y}{dx^3}$ statt $\frac{d_3 y}{dx^3}$.

— 41. — 10. v. o. — $\frac{h^m}{1.2\ldots m}$ statt $\frac{h}{1.2\ldots m}$.

— 42. — 5. v. o. — $\left\{\begin{matrix} positiv \\ negativ \end{matrix}\right\}$ statt $\left\{\begin{matrix} negativ \\ positiv \end{matrix}\right\}$.

— 59. — 16. v. o. ist nach „nämlich" einzuschalten: (Fig. 13)

— 60. — 10. v. o. lies y statt y'.

— 63. — 3. v. o. — $M''Q''$ statt $M'''Q'''$.

— 65. — 5. v. u. — $\left\{\begin{matrix} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{matrix}\right\}$ statt $\left\{\begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix}\right\}$.

— 67. — 1. v. o. — h^3 statt h_3.

— 76. — 6. v. o. — Minimum statt Maximum.

— 80. — 8. v. o. — M'' statt M'''.

— 82. — 14. v. o. — $f^{\text{v}}(x)$ statt $f(x)$.

— 92. — 9. v. o. — $\omega(h+k\sqrt{-1}))$ statt $\omega(h+k)\sqrt{-1})$.

— 93. — 5. v. o. — $\cos(V_m+m\varphi)$ statt $\cos(V_m-V_0+m\varphi)$.

S. 103. Z. 2. v. o. lies §. 191 statt §. 190.

— 106. — 17. v. o. — $t_1, -u_1$ statt t_1-u_1.

— 108. — 11. v. u. — §. 72 statt §. 71.

— 118. — 2. v. u. Die Figur zu dieser Construction kann nach Fig. 30 u. 31 leicht gezeichnet werden.

— 118. — 1. v. u. lies $2m$ statt m.

— 126. — 4. v. o. — $2(m-1)$ statt $(2m-1)$.

— 128. — 12. v. u. — $(m-1)a_1$ statt $(m-1)\alpha_1$.

— 128. — 9. v. u. — $\frac{1}{m}a_{m-1}$ statt $\frac{2}{m}a_{m-1}$.

— 129. — 5. v. o. im Nenner l. $\frac{1}{2}m(m-1)$ statt $\frac{1}{2}m(m-2)$.

— 133. — 9. v. o. lies x^{m-4} statt $x^{m-\mu}$.

— 135. — 7. v. u. — $a_m \alpha_m^{\mu}$ statt $a\, \alpha_m^{\mu}$.

— 136. — 11. v. u. — $(m-\mu)a_{m-\mu}$ statt $ma_{m-\mu}$.

— 138. — 10. v. u. nach „positive" einzuschalten: oder negative.

— 139. — 2. v. u. l. $S_{2,1}$ statt $S_{2,2}$.

— 139. — 1. v. u. — $+2S_3$ statt $-2S_3$.

— 143. — 10. v. o. — $U'x^{u+1}$ statt $U'x^{u}$.

— 145. — 10. v. o. — : die *um Eins verminderte* Menge.

— 147. — 10. v. u. — $B+b+c$ statt $B+b+d$.

— 148. — 8. v. o. — 84 statt 87.

— 152. — 3. v. o. sind die Worte „multipliciren das Resultat mit $1.2\ldots m$" zu streichen.

— 152. — 10. v. o. lies obere statt obige.

— 152. — 20. v. o. — $(m-1)(m-2)\ldots3.2$ st. $(m-1)(m-2)+\ldots3.2$

— 153. — 10. v. u. — $f(x_1+h)$ statt $f(x_1)$.

— 157. — 10 u. 11. v. u. l. $>$ statt $<$.

— 159. — 9. v. u. lies also $-\gamma$, statt: also γ.

— 170. — 11. v. u. — S_{2r-1} statt S_{2r-}.

— 200. — 14. v. o. — $3(b_1^2+b_2)$ statt $3(b_1+b_2)$.

— 209. — 12. v. u. — $f^{(j-1)}(a)=f^{(j-2)}(a)$ st. $f^{j-1}(a)=f^{j-2}(a)$.

— 225. — 5. u. 4. v. u. können die Worte „enthält — daher" wegfallen.

— 238. — 6. v. u. nach „*entweder*" einzuschalten: $=\delta^{(n)}$ *oder*.

— 245. — 15. v. o. lies -156 statt 156.

— 251. — 12. v. o. — $+63$ statt -63.

— 253. — 12. v. u. — $f^{IV}(x)$ statt $f''(x)$.

— 299. — 8. v. u. — ergaben statt ergeben.

— 315. — 7. v. u. — $f''(a)$ statt $f''(\alpha)$.

— 332. — 5. v. u. — $1\frac{1}{2}$ statt $1\frac{1}{4}$.

— 336. — 1. v. u. — $(-1)^{\frac{m-1}{2}-1}$ statt $(-1)^{\frac{m-1}{2}\;1}$.

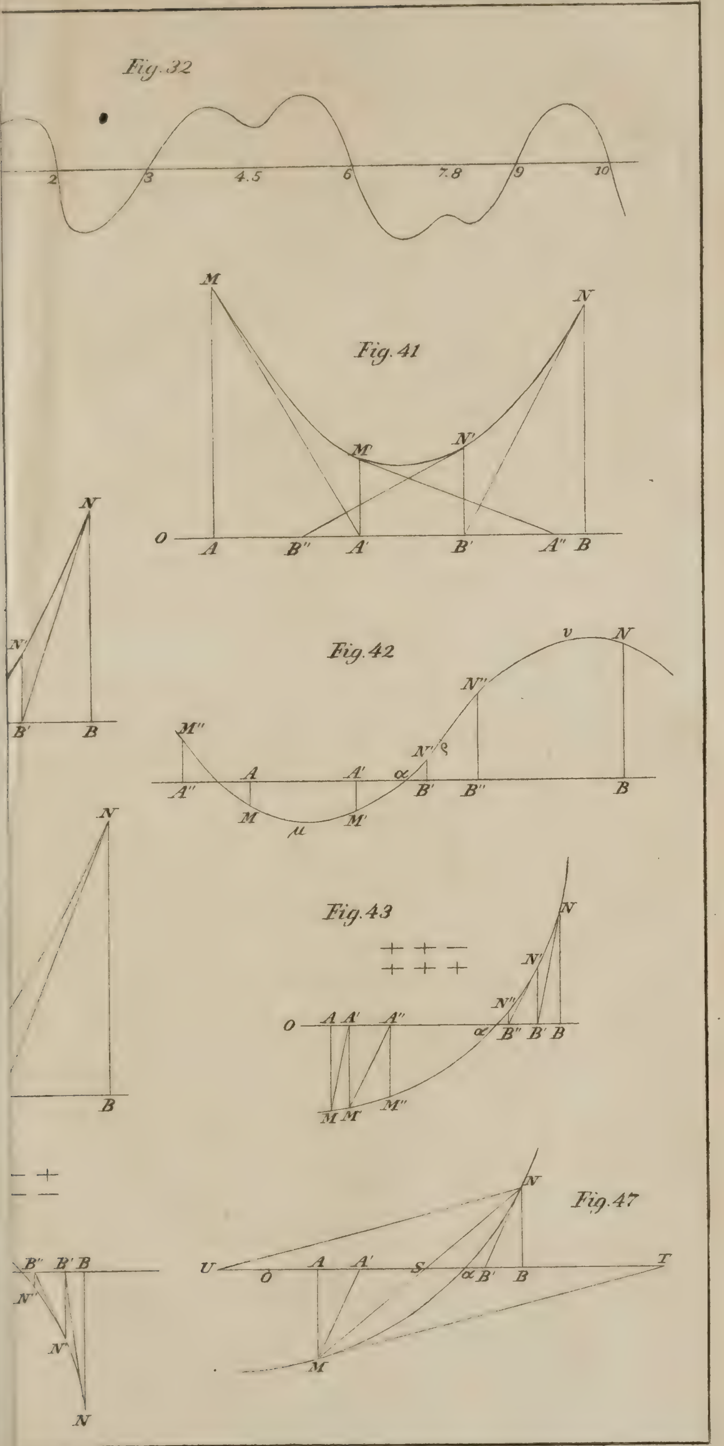


Fig. 32
2
3
4.5
6
7.8
9
10
Fig. 41
M
N
M'
N'
O
A
B''
A'
B'
A''
B
Fig. 42
v
N
N''
M''
N'''
ρ
A
A'
α
A''
B'
B''
M
M'
μ
Fig. 43
+ + −
+ + +
N'
N''
O
A
A'
α
B''
M
M''
Fig. 47
U
O
S
α
T

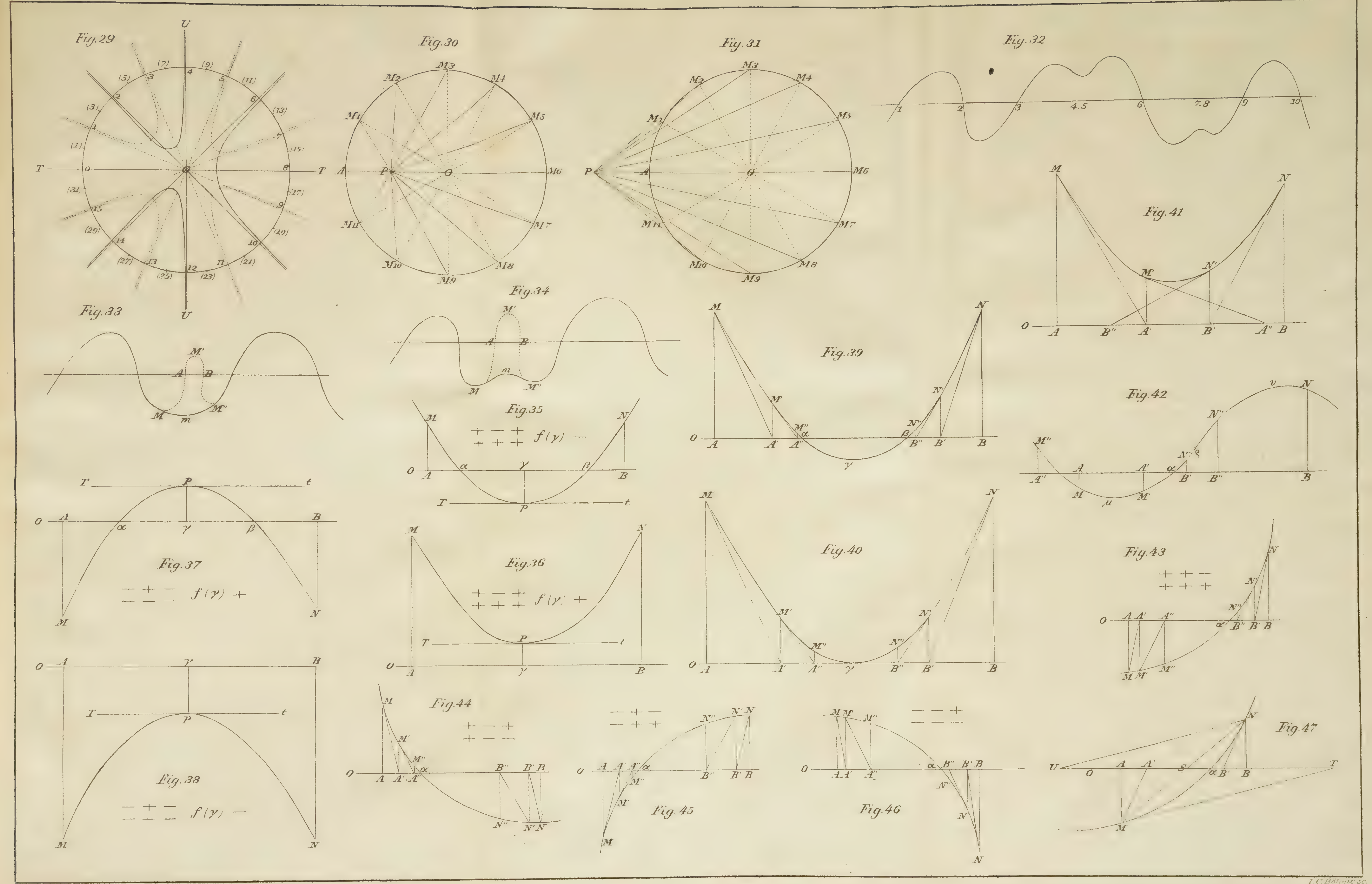

Fig. 29
Fig. 30
Fig. 31
Fig. 32
Fig. 33
Fig. 34
Fig. 35
+ — + f(γ) —
+ + +
Fig. 36
+ — + f(γ) +
+ + +
Fig. 37
— + — f(γ) +
— — —
Fig. 38
— + — f(γ) —
— — —
Fig. 39
Fig. 40
Fig. 41
Fig. 42
Fig. 43
+ + —
+ + +
Fig. 44
+ — +
+ — —
Fig. 45
— + —
— + +
Fig. 46
— — +
— — —
Fig. 47

Fig. 6

Fig. 11

Fig. 12

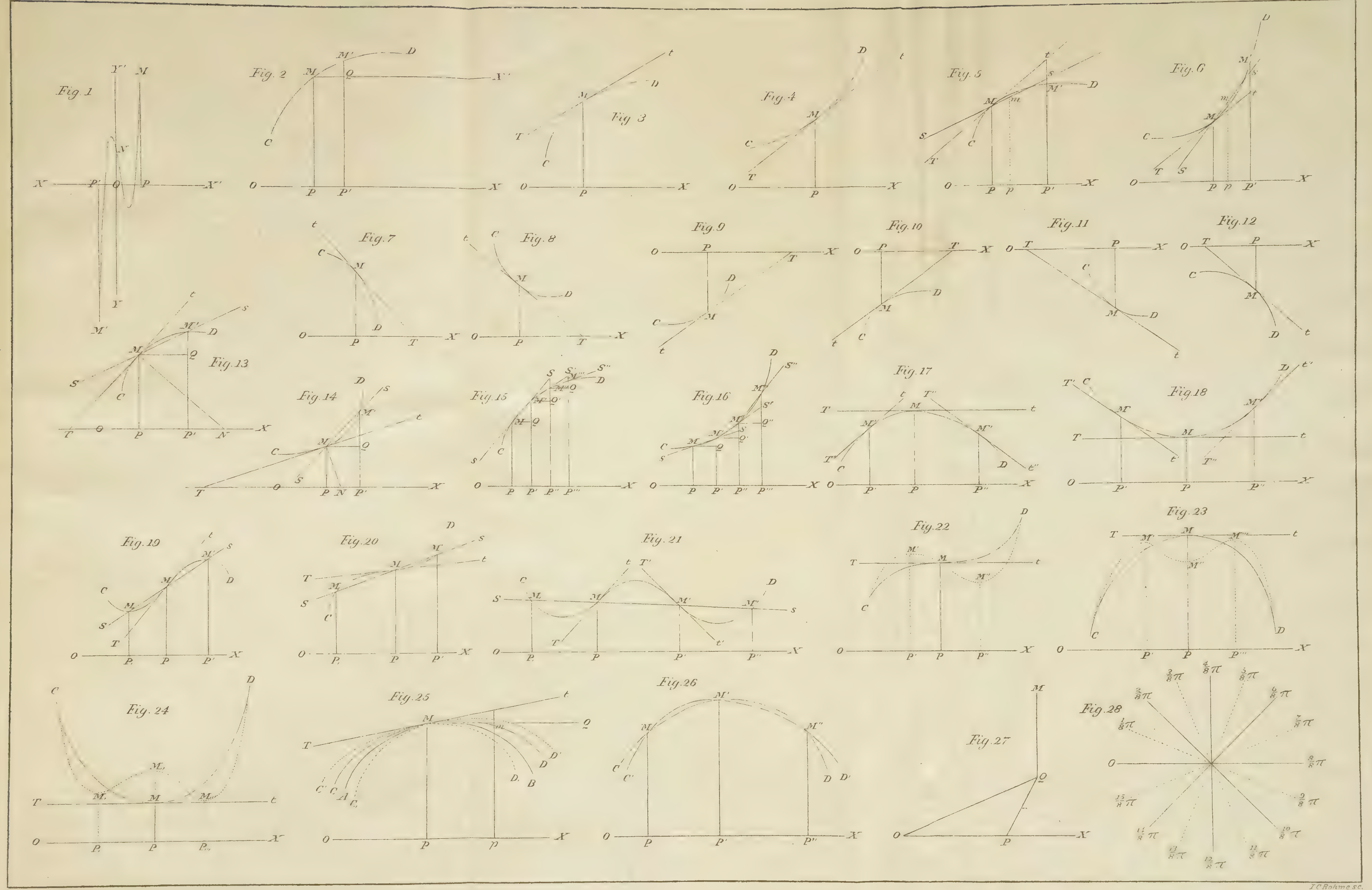
Fig. 18

Fig. 23

Fig. 27

Fig. 28

I C Bohme sc.


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20
Fig. 21
Fig. 22
Fig. 23
Fig. 24
Fig. 25
Fig. 26
Fig. 27
Fig. 28

J C Böhme sc.





